Большая перемена

Э.Н. Балаян

700 ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ И ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

5–6 классы

Издание четвертое, исправленное

Ростов-на-Дону
Феникс
2015

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.
Б20 700 лучших олимпиадных и занимательных задач по математике / Э.Н. Балаян. — Изд. 4-е, испр. — Ростов н/Д: Феникс, 2015. — 217 с. : ил. — (Большая перемена)

ISBN 978-5-222-25904-7

В предлагаемом пособии рассмотрены различные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня трудности для учащихся 5–6 классов.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, признаки делимости, инварианты, решение уравнений в целых числах, принцип Дирихле, задачи на проценты, числовые ребусы и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения. Большинство задач авторские, отмечены значком (А).

В заключительной части книги приводятся занимательные задачи творческого характера, вызывающие повышенный интерес не только у школьников, но и у взрослых читателей.

Пособие адресовано ученикам 5–6 классов общеобразовательных школ, учителям математики для подготовки детей к олимпиадам различного уровня, студентам — будущим учителям математики, работникам центров дополнительного образования, а также всем любителям математики.

УДК 373.167.1:51
ISBN 978-5-222-25904-7 ББК 22.1я721

© Балаян Э.Н., 2015
© Оформление, ООО «Феникс», 2015

Посвящается моим любимым внукам — Артуру и Григорию.

Предисловие

Роль олимпиад с каждым годом становится все более значимой. И не случайно многие вузы стали проводить свои олимпиады для будущих абитуриентов, преследуя цель — привлечь школьников в данный вуз. Победителей, занявших призовые места, освобождали от сдачи экзаменов и зачисляли в вуз.

В связи с этим назрела необходимость в доступной форме ознакомить широкие массы школьников с характером и типом задач, предлагаемых на олимпиадах.

Обычно традиционные олимпиады проходят в пять туров: школьный, районный (городской), областной (республиканский, краевой), зональный (окружной) и всероссийский.

В книге представлены задачи разного уровня трудности, причем сделано это сознательно с тем, чтобы каждый участник мог что-то решить, ибо если задачи слишком трудны, то дети теряют интерес не только к олимпиаде, но и к изучению математики.

Как правило, олимпиадная задача — это задача повышенной трудности, нестандартная как

по формулировке, так и по методам решения. Среди предложенных задач встречаются как нетривиальные, для решения которых требуются необычные идеи и специальные методы, так и задачи более стандартные, которые могут быть решены оригинальным способом. К числу таких методов можно отнести: делимость и остатки, признаки делимости чисел, решение уравнений в целых числах, метод инвариантов, принцип Дирихле, задачи на проценты, логического характера и др.

Эти задачи способствуют резкой активизации мыслительной деятельности, умственной активности, дают возможность самостоятельно составлять подобные, а возможно, и более оригинальные задачи, что в итоге приводит со временем к творческим открытиям в различных областях математики.

Автор старался привести наиболее рациональные и изящные решения, доступные школьникам 5–6 классов. Разумеется, читатель может привести и другие, возможно, более изящные решения, за что автор будет весьма признателен.

Книга состоит из трех разделов. В первом разделе приводятся условия задач для 5–6 классов.

Задачи, отмеченные значком (А), — авторские, составлены на протяжении многих лет педагогической деятельности.

Во втором разделе книги приводятся ответы, краткие указания, а к наиболее трудным — решения. Автор настоятельно рекомендует обращаться к решениям в случае, когда задача уже решена, или после неоднократных, но безуспешных попыток самостоятельно ее решить. Надо иметь в виду, что одна самостоятельно решенная задача принесет значительно больше пользы для развития ума, чем несколько других, прочитанных в книге. Только настойчивость, терпение и выдержка помогут вам преодолеть трудности, и вас непременно ожидает успех.

Третий раздел книги будет особенно интересен не только школьникам, но и взрослым читателям.

Он содержит занимательные задачи творческого характера, способствующие развитию мыслительных способностей учащихся, формирующие навыки самостоятельной работы и приемы умственной деятельности, такие как анализ, синтез, аналогия, обобщение, и, как следствие, повышающие их успеваемость.

Пособие предназначено прежде всего ученикам 5–6 классов для самостоятельной подготовки к участию в олимпиадах, учителям математики общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, студентам педвузов, а также всем любителям математики.

Раздел I

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

5 класс

1(А). Не производя указанных действий, установить, правильной или неправильной дробью является число $\dfrac{1915 \cdot 2015 - 100}{1915 + 2015 \cdot 1914}$.

2(А). Вычислить

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2014 \cdot 2015}.$$

3(А). Существуют ли такие натуральные числа m и n, что $mn(m - n) = 2015$?

4(А). Вписать в квадрат цифры от 0 до 9 без повторений так, чтобы получились три верных примера на сложение. Найти все решения.

□ + □ = □ □

□ + □ = □

□ + □ = □

5(А). На сколько % увеличится объем прямоугольного параллелепипеда, если длину и ширину его увеличить на 10%, а высоту уменьшить на 10%?

6(А). Четыре утенка и пять гусят весят 4 кг 100 г, а пять утят и четыре гусенка весят 4 кг. Сколько весит 1 утенок?

7(А). В классе 17 пловцов, 6 борцов и 13 шахматистов. Известно, что каждый спортсмен занимается двумя видами спорта. Сколько в классе спортсменов?

8(А). Можно ли, имея лишь два сосуда емкостью 3 и 5 л, набрать из водопроводного крана 4 л воды?

9(А). У каждого марсианина по 3 руки. Могут ли 13 марсиан взяться за руки так, чтобы не оставалось свободных рук?

10(А). Гусеница ползет по стволу тополя. За первый час она поднялась на 10 см, за второй час опустилась на 4 см, за третий час вновь поднялась на 10 см, а за четвертый опустилась на 4 см. Так гусеница продолжала подниматься и опускаться в течение нескольких часов. На сколько гусеница поднимется за 11 часов?

11(А). Сергей идет от дома до школы 30 мин, а брат его Николай — 40 мин. Николай вышел из дома на 5 мин раньше Сергея. Через сколько минут Сергей догонит Николая?

12(А). x, y, k — три различные цифры. Если сложить все шесть трехзначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, то получим 5328. Найти эти цифры.

13(А). Найти такие пары натуральных чисел, сумма которых больше их произведения.

14(А). Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{С И Н И Ц А} \\ + \text{С И Н И Ц А} \\ \hline \text{П Т И Ч К И} \end{array}$$

15(А). В числе 3 728 954 106 зачеркнуть три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке составили бы наименьшее семизначное число.

16(А). Заполнить пустые клетки так, чтобы сумма чисел в трех любых соседних клетках как по вертикали, так и по горизонтали равнялась 13.

	5				
					1
6					
			3		

17(А). Какой цифрой оканчивается сумма $94^6 + 76^6 + 51^6$?

18(А). Сколько в зоопарке зверей и сколько птиц, если у них вместе 6000 ног и 2500 голов?

19(А). На какое наибольшее число частей можно разрезать круглый торт пятью прямолинейными разрезами?

20(А). Сравнить дроби $\frac{1313}{9999}$ и $\frac{131313}{999999}$.

21(А). Найти все двузначные числа, которые уменьшаются в 13 раз при зачеркивании последней цифры.

22(А). Найти наименьшее натуральное число, которое кратно числам 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

23(А). Доказать, что если сумма четырех натуральных чисел — нечетное число, то их произведение — четное число.

24(А). Решить числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{М У Х А} \\ + \text{М У Х А} \\ \hline \text{С Л О Н} \end{array}$$

Здесь все гласные буквы соответствуют цифрам одной четности, а согласные — другой.

25(А). Расставить в записи $4 \cdot 12 + 18 : 6 + 3$ скобки так, чтобы получился наименьший возможный результат.

26(А). За книгу заплатили 160 руб. и еще $\frac{1}{3}$ ее стоимости. Сколько стоит книга?

27(А). Три яблока, четыре груши и один персик стоят 40 руб. Одно яблоко, четыре груши и персик стоят 32 руб. Сколько стоят одно яблоко, одна груша и персик, если персик стоит столько, сколько стоят два яблока?

28(А). В одном доме живут 23 ученика одной и той же школы. В этой школе 22 класса. Доказать, что хотя бы два ученика, живущих в этом доме, учатся в одном и том же классе.

29(А). Написать наименьшее трехзначное число, кратное 3, так, чтобы первая цифра его была 7 и все цифры были бы различны.

30(А). Какие две цифры нужно приписать к числу 2010 справа, чтобы получившееся шестизначное число делилось на 47?

31(А). Который сейчас час, если оставшаяся часть суток втрое больше прошедшей?

32(А). Сравнить дроби $\frac{29}{37}$ и $\frac{145}{187}$.

33(А). Сыну 7 лет, а отцу 37. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

34(А). 4 землекопа за 4 часа выкопали 4 ямы. Сколько ям выкопают 8 землекопов за 6 часов?

35(А). Яхта отправилась в плавание в понедельник в полдень. Плавание будет продолжаться 80 часов. Назвать день и час ее возвращения в порт.

36(А). Длину прямоугольника увеличили на 40%, а ширину уменьшили на 40%. На сколько процентов изменилась площадь прямоугольника?

37(А). В магазине имеются ящики с гвоздями массой в 12; 15; 16 и 18 кг. Может ли продавец отпустить 100 кг гвоздей, не распаковывая ящики?

38(А). Составить три арифметических примера на три разных действия, причем в эти примеры должны войти по одному разу все цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Например: $7 + 1 = 8$; $9 - 6 = 3$; $4 \cdot 5 = 20$.

39(А). Найти сумму всех трехзначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 1; 2 и 3 так, чтобы в каждом числе все цифры были различны.

40(А). Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 2014. Найти уменьшаемое.

41(А). В классе 32 ученика. Из них 18 занимаются в секции легкой атлетики, 10 — в секции плавания и 5 — в обеих секциях. Сколько учащихся этого класса не занимаются ни в одной из этих секций?

42(А). Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{Т Э Т А} \\ + \quad \text{Б Э Т А} \\ \hline \text{С У М М А} \end{array}$$

43(А). Найти наименьшее число, которое записано только единицами и делится на 33.

44(А). У мальчика столько сестер, сколько и братьев, а у его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько братьев и сколько сестер в этой семье?

45(А). Сколько нулей содержится в произведении натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100$?

46(А). Сколько раз цифра 7 встречается в записях всех чисел от 50 до 100?

47(А). Сколько существует способов составить отрезок длиной 1 м из отрезков длиной 3 и 11 см?

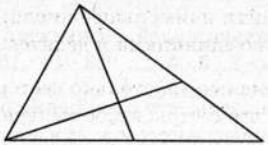
48(А). Известно, что одна из четырех монет — фальшивая, но неизвестно, легче она или тяжелее. За какое число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно это определить?

49(А). Одно число в 13 раз больше другого. Во сколько раз НОК этих чисел больше их НОД?

50(А). Николаю в 1998 г. исполнилось столько лет, какова сумма цифр года его рождения. В каком году он родился?

51(А). Из города A в город $Б$ ведут 3 дороги, а из города $Б$ в город B — 5 дорог. Сколько всего различных маршрутов поездки из города A в город B через город $Б$?

52(А). Сколько треугольников на рисунке?



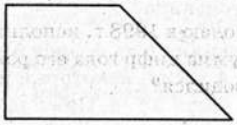
53(А). Какая цифра стоит в конце числа, выражающего произведение $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 97 \cdot 99$?

54(А). Дана последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, ... , 2013. Разрешается зачеркивать любые два числа и записывать вместо них их разность. Доказать, что если в конце остался один нуль, то где-то была допущена ошибка.

55(А). Вычислить $\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{13\text{ раз}}+$

$$+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4}}_{7\text{ раз}}-\underbrace{\frac{1}{100}-\frac{1}{100}-\frac{1}{100}-\ldots-\frac{1}{100}}_{25\text{ раз}}.$$

56(А). Разрезать фигуру на 4 равные части.



57(А). Доказать, что если в трехзначном числе сумма кратных цифр равна средней, то число делится на 11.

58(А). Восстановить цифру a в числе $\overline{7aa4}$, которое делится на 9.

59(А). Сколько нулей содержится в конце записи числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$?

60(А). Доказать, что отношение разности между двузначным числом и суммой его цифр к числу десятков равно 9.

61(А). Сколько слагаемых с числителем 1 пропущено в примере $\frac{4}{13} + \frac{3}{13} + \frac{1}{13} + \ldots + \frac{2}{13} = 3$?

62(А). Заменить звездочки цифрами так, чтобы число 13*26915* делилось на 72.

63(А). На столе стоят 35 тарелок: 20 — вверх дном, а 15 — вниз дном. За один ход разрешается взять любые две тарелки и перевернуть их. Можно ли за несколько таких операций добиться того, чтобы все тарелки лежали вверх дном?

64(А). В прямоугольнике размерами 50×12 дм большую сторону уменьшили на 50%, а меньшую увеличили на 150%. Как изменилась площадь прямоугольника?

65(А). У ученика был 1 лист бумаги. Он разорвал его на 4 части, некоторые из частей еще разорвал на 4 части и т. д. При подсчете выяснилось, что таких частей всего 2013. Доказать, что ученик ошибся в подсчете.

66(А). Углы в 40 и 60° имеют общую сторону. Какой угол образует биссектриса большего угла с общей стороной этих углов?

67(А). До конца суток осталось $\frac{5}{3}$ того времени, что уже прошло от начала суток. Который теперь час?

68. На сколько частей могут делить плоскость 4 прямые?

69(А). Число разделили на 7 и в частном получили 5, а остаток на 1 больше частного. Какое число разделили на 7?

70. Можно ли в записи 1*2*3*4*5*6*7*8*9 = = 30 вместо * поставить (в любом порядке) знаки «+» и «−» так, чтобы получилось верное равенство?

71(А). Найти наименьшее и наибольшее трехзначные числа, произведение цифр которых равно 18.

72(А). Разность между первым и вторым числами равна разности между третьим и первым числами. Доказать, что первое число есть среднее арифметическое между вторым и третьим.

73(А). Сумма цифр a и b делится на 13. Доказать, что число $\overline{aba}$ также делится на 13.

74(А). Сумма двух чисел равна 209. Одно из них заканчивается нулем. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найти эти числа.

75(А). На сколько среднее арифметическое всех четных чисел от 1 до 1000 больше или меньше среднего арифметического всех нечетных чисел от 1 до 1000?

76(А). Хулиган Вася в наказание за полученную двойку получил на дом пример:

вычислить $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 99 \cdot 100$.

Потратив всю ночь, Вася вычислил и получил 20122011. Доказать, что он ошибся.

77(А). Морская вода содержит 5% соли. Сколько кг пресной воды надо добавить к 20 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составило 2%?

78(А). Дедушка в лифте, а внучка по лестнице поднимаются на 7 этаж за 36 с. За сколько секунд каждый из них поднимается на один этаж?

79(А). К числу прибавили $\frac{1}{2}$ его, а затем вычли $\frac{1}{2}$ суммы и получили 333. Найти число.

80(А). На одну чашку весов положили кусок мыла, а на другую $\frac{2}{3}$ такого же куска и еще

$\frac{2}{3}$ кг. Весы оказались в равновесии. Чему равна масса куска мыла?

81(А). Разделить метр на две части так, чтобы разность между ними составляла 13 см.

82(А). Как от веревки длиной $\frac{2}{3}$ м отрезать $\frac{1}{2}$ м, не пользуясь никакими измерительными приспособлениями?

83(А). В секции футбола мальчиков в 16 раз больше, чем девочек, при этом всего в секции не более 30 человек. Можно ли их разбить на пары?

84(А). Можно ли между числами от 1 до 9 поставить знаки «+» и «−» так, чтобы получилось число 40?

85(А). Руслану выставили годовые оценки по 12 предметам. Его средний балл был 3,5. По скольким предметам ему надо повысить свои оценки на 1 балл, чтобы средний балл стал равен 4?

86(А). На доске написаны 10 простых чисел, каждое из которых больше двух. Может ли их сумма равняться 71?

87(А). Доказать, что из трех целых чисел всегда можно найти два, сумма которых делится на 2.

88. Все натуральные числа от 1 до 999 выписали в ряд, получилось многозначное число. Найти сумму его цифр.

89(А). Какой цифрой оканчивается сумма $66^7 + 111^9 + 444^{13}$?

90(А). Зачеркнуть в числе 20 007 425 пять цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.

91(А). Найти 8 последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равна сумме остальных пяти.

92(А). Зарплату учителям повысили на 45%. А через год еще на 20%. На сколько увеличилась зарплата учителя?

93(А). Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее трехзначное число, чтобы получить наибольшее четырехзначное?

94(А). Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы получить трехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами?

95(А). Доказать, что среди любых 13 натуральных чисел найдутся два числа, разность которых делится на 12.

96(А). У крольчат и гусят вместе 44 ноги и 15 голов. Сколько крольчат и сколько гусят?

97. Расставить по кругу 4 единицы, 3 двойки и 3 тройки так, чтобы сумма любых трех подряд стоящих цифр не делилась на 3.

98(А). Если в двузначном числе переставить цифры местами, то число увеличится на 54. Найти все такие числа.

99(А). Если Сергей купит 15 тетрадей, то у него останется 7 рублей, а на 20 тетрадей у него не хватит 8 рублей. Сколько денег у Сергея?

100(А). Найти сумму: $1 + 3 + 5 + \ldots + 99$.

101(А). Найти все двузначные числа, которые в 7 раз больше суммы своих цифр.

102(А). Вычислить $101 \cdot 111\,111 - 101\,101 \cdot 111$.

103(А). Угадать корни уравнения $8 : x = 6 - x$.

104(А). В числе 7******1 заменить звездочки числами так, чтобы сумма любых трех соседних чисел равнялась 11.

105(А). Внуку столько месяцев, сколько лет бабушке, а вместе им 78 лет. Сколько лет внуку и сколько лет бабушке?

106(А). Выразить x из формулы $n = (6 - x) : 7$.

107(А). Найти остаток от деления 9^{100} на 8.

108(А). Можно ли прямоугольник 3×6 разрезать так, чтобы получилось два равных шестиугольника?

109(А). Решить уравнение $7 + \frac{510}{x-5} = 24$.

110(А). Найти последнюю цифру числа $1911 \cdot 1912 \cdot 1913 + 1914^2 \cdot 1915^2$.

111(А). Участникам школьной викторины было предложено 30 вопросов. За правильный ответ давали 13 очков, а за неправильный списывали 10 очков. Один из участников ответил на все вопросы и набрал 160 очков. Сколько правильных ответов он дал?

112(А). В ящике яблоки трех сортов. Какое наименьшее количество яблок надо взять наугад, не заглядывая в ящик, чтобы среди вынутых яблок оказались хотя бы три яблока одного сорта?

113(А). Какое наибольшее число прямоугольников 1×3 можно вырезать из квадрата 5×5?

114(А). Разность сторон прямоугольника равна 7 м. Меньшая сторона составляет 65% длины большей стороны. Вычислить периметр прямоугольника.

115(А). Сколько раз к наибольшему двузначному числу надо прибавить наибольшее трехзначное число, чтобы получить наибольшее пятизначное?

116(А). Сумма цифр двух последовательных натуральных чисел делится на 7. Найти наименьшее из таких чисел.

117(А). Развернутый угол разделен на 3 части так, что один из них в два раза меньше второго и в три раза меньше третьего. Найти градусную меру каждого из углов.

118(А). У крольчат и гусят вместе 76 ног и 23 головы. Сколько всего крольчат и гусят?

119(А). Можно ли разложить 100 арбузов в 17 корзин, расставленных по кругу так, чтобы в любых двух соседних корзинах число арбузов отличалось на 1?

120(А). Сумма двух чисел равна 51. Найти эти числа, если 30% одного равны 60% другого.

121(А). Если школьник купит 8 ручек, то у него останется 10 рублей. А на 13 ручек у него не хватает 15 рублей. Сколько денег у школьника?

122(А). На доске написано число 4 839 651 027. Зачеркнуть в нем три цифры так, чтобы оставшиеся цифры в том же порядке образовали наименьшее число.

123(А). Чтобы испечь хлеб, муку замешивают с равным ей по массе количеством воды. В печи тесто теряет 30% своей массы. Сколько нужно взять муки, чтобы испечь 7 т хлеба?

124(А). Вычислить $101\,101 \cdot 555 - 101 \cdot 555\,555$.

125(А). В стране 19 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в стране?

126(А). Каменный уголь содержит 1% воды. Через некоторое время он пропитывается водой так, что содержит уже 10% воды. На сколько при этом увеличится масса добытого угля в 100 т?

127. Можно ли прямоугольник разрезать так, чтобы получилось 4 четырехугольника?

128(А). В феврале некоторого года 2 419 200 секунд. Високосным ли был этот год?

129(А). Который сейчас час, если истекшая часть суток равна 25% остающейся?

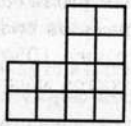
130(А). Ручка и альбом вместе стоят 32 руб., а 5 ручек и 2 альбома стоят 100 руб. Сколько стоят ручка и альбом?

131(А). Среднее арифметическое трех чисел равно 243, а среднее арифметическое семи других чисел равно 463. Чему равно среднее арифметическое всех десяти чисел?

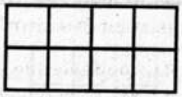
132(А). Сплавили 3 кг серебра 650-й пробы и 2 кг 720-й пробы. Какой пробы получился сплав?

133(А). Во сколько раз увеличится трехзначное число, если к нему приписать (слева или справа) такое же число?

134(А). Разрезать фигуру на две одинаковые части.



135(А). Сколько прямоугольников изображено на рисунке? Площадь одного квадрата 1 см².

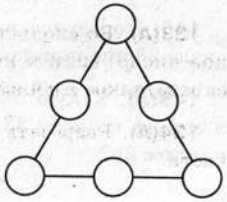


136(А). Выполните действия:
$(\overline{ABCABC} + \overline{ABC}) : \overline{ABC}$.

137(А). На какую цифру оканчивается произведение всех нечетных чисел от 1 до 2015?

138(А). В пакете 7 яблок. Как разделить эти яблоки между семью детьми, чтобы каждый ребенок получил по одному яблоку и чтобы одно яблоко осталось в пакете?

139. Расположить цифры от 1 до 6 на вершинах треугольника и в середине каждой из его сторон так, чтобы сумма трех чисел, расположенных на каждой из его сторон, равнялась 12.



140(А). 4 курицы снесли за 4 дня 4 яйца. Сколько яиц снесут 16 кур за 16 дней?

141(А). Расставить 14 стульев вдоль стен в актовом зале, имеющем форму квадрата, так, чтобы у каждой стены стульев стало поровну.

142. Вписать в пустые клетки цифры от 2 до 8 так, чтобы сумма чисел в каждом горизонтальном, вертикальном и диагональном рядах была одинакова.

	0	
1		

143(А). Установить закономерность в последовательности и записать еще 3 числа: 3, 5, 9, 17, ...

144. Разместить числа 1, 2, 3, ..., 9, каждое по одному разу, вдоль сторон и в вершинах треугольника так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 20.

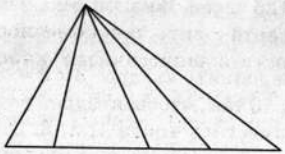
145. Пользуясь только сложением, записать число 28 при помощи пяти двоек.

146(А). Какую цифру надо приписать слева и справа к числу 23, чтобы получилось число, кратное 36?

147(А). Через 9 точек, расположенных в форме квадрата, провести 4 прямые линии, не отрывая ручки от бумаги.

148. Летели гуси: 1 впереди и 2 позади, 1 позади и 2 впереди, один между двумя и 3 в ряд. Сколько всего летело гусей?

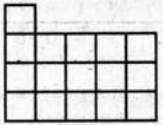
149(А). Сколько треугольников на рисунке?



150(А). Среди чисел вида $7n + 1$ найти первые 3 числа, которые делятся на 10.

151(А). Чтобы распилить деревянный брус на 2 части, нужно уплатить за работу 10 руб. Сколько будет стоить работа, если брус распилить на 10 частей?

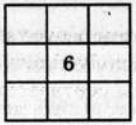
152(А). Разрезать фигуру по сторонам клеток на 4 одинаковые части.



153(А). Было 10 листов бумаги. Ученик разрезал некоторые из них на 4 части, после чего стало 28 листов. Сколько листов бумаги разрезал ученик?

154. Пароход отправляется в путешествие в понедельник в полдень. Путешествие будет продолжаться 125 часов. В какой день и час пароход вернется в порт?

155(А). Заполнить квадрат 3 × 3 числами 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 так, чтобы квадрат стал «магическим».



156(А). Для нумерации страниц орфографического словаря понадобилось 2016 цифры. Сколько страниц было в этом словаре?

157. Решить числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \times \quad 2\ 3\ 7 \\ *\ 1\ *\ *\ * \\ \hline 7\ *\ *\ *\ 0\ 6\ 5 \end{array}$$

158(А). Сколько потребуется отдельных металлических цифр для нумерации 113 квартир в новом доме?

159(А). Средний возраст 11 игроков футбольной команды равен 24 годам. При удалении одного из игроков с поля средний возраст оставшихся игроков не изменился. Сколько лет удаленному игроку команды?

160. Собака преследует зайца, который находится на расстоянии 40 своих прыжков впереди собаки. Собака делает 7 прыжков, в то время как заяц делает их 9, но 3 прыжка собаки равны 5 прыжкам зайца. Сколько прыжков надо сделать собаке, чтобы догнать зайца?

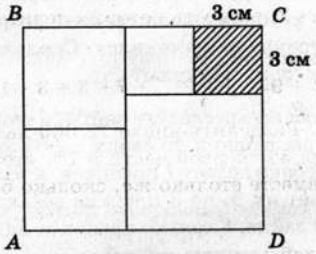
161(А). В числовом ребусе заменить буквы цифрами так, чтобы получилось верное равенство. Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам.

$$\begin{array}{r} В\ О\ Д\ А \\ +\ В\ О\ Д\ А \\ \hline З\ А\ В\ О\ Д \end{array}$$

162(А). На трех прямых отметить 3 точки так, чтобы на каждой прямой оказалось по две точки.

163(А). Числитель дроби на 3 меньше знаменателя. Если к числителю прибавить 5, а из знаменателя вычесть 4, то полученная дробь будет в 4 раза больше первоначальной. Найти дробь.

164(А). Прямоугольник $ABCD$ разбит на квадраты. Найти периметр прямоугольника, если сторона закрашенного квадрата 3 см.



165(А). Какова крепость (концентрация) раствора соли, если к 720 г воды добавлено и растворено в ней 80 г соли?

166. Вместо букв поставить цифры так, чтобы получилось верное равенство:

$$\begin{array}{r} \text{У Д А Р} \\ + \text{У Д А Р} \\ \hline \text{Д Р А К А} \end{array}$$

167. Имеются контейнеры двух видов: по 130 и 160 кг. Нужно загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 тонны. Можно ли это сделать?

168. Собака, находясь в точке A, погналась за лисицей, которая была на расстоянии 30 м от собаки. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы — 1 м. Собака делает два скачка в то время, когда лисица делает три скачка. На каком расстоянии от точки A собака догонит лисицу?

169. Доказать, что из $n + 1$ целого числа можно выбрать 2, разность которых делится на n.

170. Вычислить
$99 - 97 + 95 - 93 + \ldots + 7 - 5 + 3 - 1$.

171(А). Разделить число 15 000 на две части так, чтобы 5% первой части и 7% второй составили бы вместе столько же, сколько 6,5% всего числа.

172. Чтобы умножить нечетное число на 15, достаточно к этому числу прибавить частное от деления этого числа на 2 и к результату приписать цифру 5. Доказать.

173. Можно ли подобрать 4 целых числа, сумма и произведение которых являются нечетными числами?

174(А). Какой цифрой оканчивается сумма $2013^6 + 2014^6 + 2015^6$?

175. Стоимость изделия удалось снизить на 10%, а через месяц еще на 15% с новой стоимости. На сколько процентов снизилась стоимость изделия в результате двух снижений?

176(А). Четное или нечетное число $1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$?

177. Расшифровать ребус:

$$\begin{array}{r} \text{Д Р А М А} \\ + \text{Д Р А М А} \\ \hline \text{Т Е А Т Р} \end{array}$$

178(А). На одну чашу весов положили брусок мыла, на другую — половину такого же бруска и еще 0,5 кг. Сколько весит брусок?

179. Куб со стороной 1 м распилили на кубики со стороной 1 см и выложили их в один ряд. Найти длину ряда.

180. Записать число 20, употребляя только цифры 1, 3, 5 и 7, причем каждую из них ровно по 3 раза.

181(А). В 5-А классе учится 26 учеников, знающих 157 стихотворений. Доказать, что найдется ученик, знающий не менее 7 стихотворений.

182(А). По столбу высотой 10 м взбирается улитка. Днем она поднимается на 5 м, а ночью опускается на 4 м. Через сколько дней улитка достигнет вершины столба?

183. Как расположить 12 монет в 6 рядов по 4 монеты в каждом ряду?

184(А). Найти наименьшее четырехзначное число, которое при делении на 6 дает в остатке 5.

185(А). Доказать, что если сумма двух натуральных чисел меньше 17, то произведение их не больше 64.

186. Если от каждого из двух чисел вычесть половину меньшего из них, то остаток от большего будет втрое больше остатка от меньшего. Во сколько раз большее число больше меньшего?

187. Разделить правильный шестиугольник на 3 равных по форме и площади пятиугольника.

188(А). Дана дробь $\frac{13}{17}$. Какое число надо вычесть из числителя и знаменателя, чтобы получить дробь $\frac{2}{3}$?

189. Доказать, что разность между трехзначным числом и суммой его цифр делится на 9.

190(А). Настенные часы с боем бьют каждый час и отбивают столько ударов, сколько показывает часовая стрелка. Сколько ударов отобьют часы в течение 6 часов?

191(А). На необитаемом острове живут 7 серых, 12 зеленых и 11 красных хамелеонов. При встрече двух хамелеонов разных цветов они меняют свой цвет на третий. Могут ли все хамелеоны приобрести одинаковый цвет?

192. Доказать, что число вида $\overline{abab} - \overline{baba}$ делится на 9.

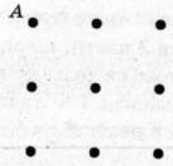
193(А). Сергей идет от дома до школы 20 минут, а его брат Николай — 30 минут. Через сколько минут Сергей догонит брата, если Николай вышел из дома на 6 минут раньше?

194(А). Мотоциклист проходит расстояние MN за 10 часов. На сколько процентов следует увеличить его скорость, чтобы то же расстояние он преодолел за 8 ч?

195(А). Вычислить наиболее рациональным способом: $\frac{5}{13} \cdot \left(3\frac{6}{7} \cdot 2{,}6 + 2\frac{3}{5} \cdot 6\frac{1}{7}\right)$.

196(А). Расставить числа $\frac{9}{10}; \frac{10}{11}; \frac{11}{12}; \frac{12}{13}$ в порядке возрастания.

197. Девять точек расположены так, как указано на рисунке. Сколько можно построить треугольников, одной из вершин которых является точка A, а двумя другими — две из оставшихся точек?



198(А). Периметр прямоугольника равен 14 м. На сколько увеличится его площадь, если длину каждой стороны увеличить на 1 м?

199(А). В семье четверо детей, им 4, 8, 14 и 15 лет. Детей зовут Анна, Гриша, Ольга и Валя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Валя старше Гриши, а сумма лет Вали и Анны делится на 3?

200(А). Пусть n — натуральное число. При $n = 1, 2, 3, \ldots, 13$ число вида $n^2 + n + 17$ — простое. Можно ли утверждать, что при любом $n \in N$ будем получать простые числа?

201. В некотором месяце 3 четверга пришлось на четные числа. Какой день недели был 26-го числа этого месяца?

202. Доказать, что из 101 числа можно выбрать два, разность которых делится на 100.

203. В квадратном помещении поставить вдоль стен 10 стульев так, чтобы у каждой стены было стульев поровну.

204(А). Имеется 3 листа бумаги. Некоторые из них разрывают на 3 части, из полученных листков некоторые снова разрывают на 3 части и т. д. При подсчете оказалось 100 листков. Правильно ли был произведен расчет?

205(А). При каких натуральных значениях n имеет место неравенство $3^n > 100$?

206(А). Найти все двузначные числа, которые уменьшаются в 14 раз при зачеркивании последней цифры.

207(А). При каком наименьшем натуральном n число вида n^2 и 2^n делится на 19?

208(А). Найти трехзначное число, которое уменьшается в 10 раз, если зачеркнуть его среднюю цифру.

209. В некотором месяце три субботы пришлись на четные числа. Какой день недели был 25 числа этого месяца?

210(А). Два числа относятся как 2 : 5. На какое число надо разделить второе число, чтобы отношение стало равным 2 : 3?

211(А). Сколькими способами из отрезков длиной 7 и 12 см можно составить отрезок длиной 1 м?

212. Тремя двойками, не используя знаков действий, записать наибольшее число.

213. Существует ли прямоугольник, у которого периметр численно равен площади?

214(А). Разделить число 10 на такие две части, разность которых равна 5.

215(А). Найти наибольшее трехзначное число, кратное 3, у которого все цифры различны и начинаются цифрой 7.

216. Найти наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4.

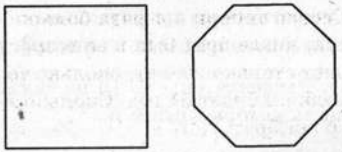
217. Один рабочий может выкопать колодец глубиной 2 м и диаметром 1 м в течение 4 часов. В течение скольких часов могут выкопать этот колодец 8 рабочих?

218(А). Цены снижены на 20%. На сколько процентов больше можно купить товаров на ту же заработанную плату?

219(А). Класс шел парами. Один из учеников глянул вперед и насчитал 8 пар, затем обернулся назад и насчитал 4 пары. Сколько всего участников шло в колонне?

220. Пишутся подряд все целые числа от 1 до 100 включительно. Сколько раз придется написать каждую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

221. Можно ли квадрат разделить на 5 частей и собрать восьмиугольник?



222(А). Произведение трех последовательных нечетных чисел равно 315. Найти эти числа.

223. В одной семье 5 братьев. У каждого брата есть сестра. Сколько всего детей в этой семье?

224(А). Произведение четырех последовательных натуральных чисел равно 360. Найти эти числа.

225. Учитель истории решил забрать учеников двух шестых классов на экскурсию. Когда он их построил парами, оказалось, что один человек остался без пары. То же самое произошло, когда учитель хотел построить учеников тройками и четверками. Каждый раз оставался один ученик. И только лишь когда он построил всех пятерками, не осталось ни одного ученика вне строя. Сколько было учеников?

226. На какое наименьшее число нужно умножить 12 345 679, чтобы получить число, состоящее из одних пятерок?

227. Сумма трех натуральных чисел равна их произведению. Найти эти числа.

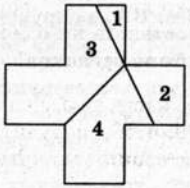
228. Сестре теперь в 4 раза больше лет, чем было тогда, когда брат был в ее возрасте. Когда сестре будет столько же лет, сколько теперь брату, то им обоим будет 51 год. Сколько лет сестре и сколько лет брату?

229(А). На сколько процентов увеличится объем куба, если длину каждого ребра увеличить на 10%?

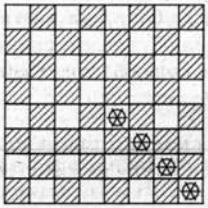
230(А). Каменщик один может выполнить работу за 3 дня, а с помощью ученика — за 2 дня. За сколько дней выполнит всю работу ученик самостоятельно?

231(А). При каких значениях x выражение $\dfrac{3}{3-\dfrac{3}{|x-3|}}$ не имеет смысла?

232. Разрезать крест на 4 части и сложить из получившихся частей квадрат.



233. Как мудрецы разделили шахматную доску с алмазами на 4 одинаковые части с одним алмазом в каждой?



234. В клетках квадрата переставить числа так, чтобы их сумма по любой вертикали, горизонтали и диагонали была одна и та же.

3	5	7
9	11	13
15	17	19

235. Белка взбирается на ствол дерева по спирали, поднимаясь за один виток на 2 м. Сколько метров она преодолеет, добравшись до вершины, если высота дерева 8 м, а окружность 1,5 м?

236. У каждого марсианина по 3 руки. Могут ли 17 марсиан взяться за руки так, чтобы не оставалось свободных рук?

237. x, y, k — три различные цифры. Если сложить все шесть трехзначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, то получим 5328. Найти эти цифры.

238(А). За книгу заплатили 180 руб. и еще $\frac{1}{3}$ ее стоимости. Сколько стоит книга?

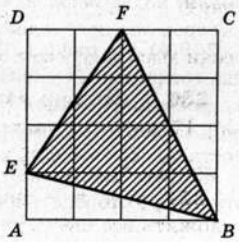
239(А). Прямоугольная плитка шоколада состоит из 8 × 4 единичных квадратных долек. Сколько разломов нужно сделать (одновременно ломается 1 кусок), чтобы разломить эту плитку на единичные квадратные дольки?

240(А). Три яблока, 4 груши и один персик стоят 61 руб. Два яблока, 4 груши и 2 персика стоят 66 руб. Сколько стоит одно яблоко, одна груша и персик, если персик стоит столько, сколько стоят 2 яблока?

241. Чтобы разрезать металлическую балку на две части, нужно уплатить мастеру за работу 50 рублей. Сколько будет стоить работа, если балку разрезать на 8 частей?

242. Доказать, что из трех целых чисел всегда можно найти два, сумма которых делится на два.

243. Найти площадь заштрихованного треугольника, изображенного на рисунке, если 1 см — 2 клетки.



244. В 5а классе число отсутствующих учеников составило $\frac{1}{9}$ часть от числа присутствующих. Сколько процентов класса отсутствовало?

245. Можно ли раздать 42 банана десяти обезьянам так, чтобы любые две получили различное число бананов?

246(А). Разделить числа 1; 2; 7; 13; 18; 25; 31; 43 на две группы так, чтобы сумма чисел одной группы была равна сумме чисел другой группы.

247(А). В трех коробках находится карамель, печенье и халва. На первой коробке написано «карамель», на второй — «печенье», на третьей — «карамель или халва». Что находится в коробках, если содержимое каждой из коробок не соответствует надписи на ней?

248. Внутри круга отмечена точка, которая не совпадает с его центром. Можно ли разрезать круг на 3 части так, чтобы из них можно было бы сложить новый круг с центром в отмеченной точке?

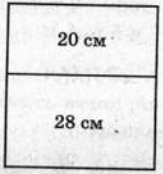
249(А). Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 надо составить два трехзначных числа так, чтобы их сумма оказалась минимальной (каждую цифру можно использовать по одному разу). Найти все решения.

250(А). Число оканчивается цифрой 1. Если эту цифру отбросить и к полученному числу прибавить исходное, то получится 719 753. Найти это число.

251(А). Имеется 4,5 кг конфет. Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах взвесить 1 кг конфет с помощью одной гири 100 г?

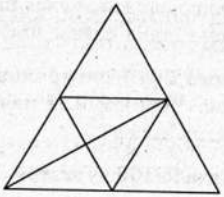
252(А). Квадрат со стороной 1 м разрезали на квадраты со стороной 1 дм и выстроили их в один ряд в виде полоски шириной 1 дм. Какой длины получилась полоса?

253(А). Квадрат (см. рис.) разделен на прямоугольники, периметры которых 20 см и 28 см соответственно. Найти периметр квадрата.



254(А). У зайчика насморк. Он пользуется квадратными платками размером 20 × 20 см. За 10 дней зайчик израсходовал 2 м² ткани. Сколько платков в день тратил зайчик?

255(А). Сколько треугольников изображено на рисунке?



256(А). Сергей живет на третьем этаже, а Коля в два раза выше. На каком этаже живет Коля?

257(А). Я живу на пятом этаже, а мой брат — на третьем. Возвращаясь с работы домой, мне приходится пройти 60 ступенек. Сколько ступенек проходит мой брат, когда возвращается домой?

258(А). Можно ли разменять купюру достоинством 50 руб. с помощью 13 монет достоинством 1 и 5 руб.?

259(А). Отцу и сыну вместе 90 лет. Сын родился, когда отцу было 30 лет. Какого возраста отец и сын?

260. Лев съел оленя за 2 дня, волк — за 3 дня, собака — за 6 дней. За сколько дней они вместе съедят оленя?

261. 17 ребят собрали 150 орехов. Доказать, что какие-то двое из них собрали одинаковое число орехов.

262. Конь вышел с поля $a1$ шахматной доски и через несколько ходов вернулся на это же поле. Доказать, что он сделал четное число ходов.

263(А). Сумма 2015 натуральных чисел — число нечетное. Четным или нечетным будет произведение этих чисел?

264(А). Приехало 100 туристов. Из них 12 человек не знали ни английского, ни французского языка, 73 знали английский и 80 знали французский. Сколько туристов знали французский и английский языки?

265(А). Если школьник купит 13 тетрадей, то у него останется 6 рублей. А на 17 тетрадей у него не хватает 6 рублей. Сколько денег у школьника?

266(А). На городской олимпиаде по математике участникам было предложено решить 5 задач. За каждую решенную задачу начисляли по 6 очков, а за каждую нерешенную вычитали 2 очка. Сколько задач решил участник, если он набрал 22 очка? 6 очков?

267(А). Победителей олимпиады выстроили на сцене актового зала. Директор школы заметил, что победитель олимпиады Коля стоял седьмым справа, а учитель математики обратил внимание на то, что Коля стоял девятым слева. Сколько всего учеников стояло на сцене?

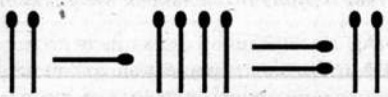
268(А). Чему равна площадь прямоугольника, если его длина на 7 см больше ширины, а половина периметра равна 13 см?

269. Расшифровать ребус:

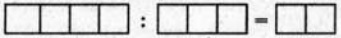
$$\begin{array}{r} \text{ОДИН} \\ +\ \text{ОДИН} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$$

270. Может ли быть в одном месяце пять воскресений? При каких условиях может быть пять воскресений?

271. Переложить 1 спичку так, чтобы получилось верное равенство.



272. Расставить числа от 1 до 9 так, чтобы получилось верное равенство.



273(А). В коробке лежат 9 красных и 8 зеленых карандашей. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них был один зеленый?

274. У какого наименьшего четырехзначного числа сумма цифр больше, чем у любого меньшего числа?

275. Сколько прабабушек и прадедушек было у всех ваших прабабушек и прадедушек?

276. Турист отправился к источнику за водой с двумя бидонами в 3 и 5 л. Как сможет он принести в палатку ровно 4 л воды?

277. Имеются песочные часы на 3 мин и 7 мин. Как с помощью этих часов опустить яйца в кипящую воду ровно на 4 мин?

278. Как разрезать 2 равных квадрата на две части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

279(А). Сумма двух чисел равна 209. Одно из них оканчивается нулем. Если этот нуль зачеркнуть, то получится второе число. Найти эти числа.

280(А). Четыре ученика за 3 ч выкопали 6 ям для посадки деревьев. Сколько ям выкопают 8 учеников за 5 ч?

281(А). Найти все двузначные числа, которые в 7 раз больше суммы своих цифр.

282. Какое наибольшее число прямоугольников 1×3 можно вырезать из квадрата 5×5?

283(А). Внуку столько месяцев, сколько лет дедушке. Вместе им 78 лет. Сколько лет дедушке и сколько лет внуку?

284(А). Напишите в строчку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была отрицательной, а сумма всех чисел положительной.

285. В кастрюлю необходимо налить 4 л воды. У хозяйки есть только два сосуда: один емкостью 5 л, а второй емкостью 3 л. Как поступила хозяйка?

286(А). Известно, что 13 карандашей дороже 14 тетрадей. Что дороже: 14 карандашей или 15 тетрадей?

287(А). Во сколько раз лестница, ведущая на 7-й этаж дома, длиннее лестницы, ведущей на 2-й этаж того же дома?

288(А). Три пятиклассника купили 13 пирожных, причем Григорий купил в 3 раза меньше пирожных, чем Коля, а Сергей — больше Григория, но меньше Коли. Сколько пирожных купил каждый?

289(А). Какова последняя цифра выражения $2011 \cdot 2013 \cdot 2015 - 2012 \cdot 2014$?

290(А). Три кошки поймали 3 мышек за 3 минуты. Сколько кошек поймают 6 мышек за 6 минут?

291(А). Рост Буратино 1 м, а длина его носа — 10 см. Каждый раз, когда Буратино врал, длина его носа удваивалась. Буратино перестал врать, когда нос стал длиннее его самого. Сколько раз Буратино соврал?

292(А). Как разделить круг тремя прямыми на 4; 5; 6 частей?

293(А). Как расположить четыре прямые на плоскости, чтобы образовалось 16 прямых углов?

294(А). Расставьте скобки в записи $13 \cdot 9 + 6 : 3 - 2$ так, чтобы значение полученного выражения было равно: а) 37; б) 123.

295(А). Вычислите наиболее рациональным способом: $101 \cdot 999\,999 - 101\,101 \cdot 999$.

296(А). Сергей говорит: «Позавчера мне было 9 лет, а в следующем году мне исполнится 12 лет». Может ли такое быть?

297(А). На какую цифру оканчивается произведение всех нечетных чисел от 1 до 2015?

298(А). Диагональ четырехугольника с периметром 38 см делит его на два треугольника с периметрами 35 см и 21 см. Найдите длину диагонали четырехугольника.

299(А). Средний возраст членов секции восточных единоборств 13 лет. Старосте секции 19 лет, а средний возраст остальных членов секции 12 лет. Сколько детей занимается в секции?

300. Решить числовой ребус, заменив буквы цифрами так, чтобы получилось верное равенство. Одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, а разным цифрам соответствуют разные буквы.

```
  КАКОЕ
+ЧИСЛО
      В
ОТВЕТЕ
```

6 класс

1(А). Расставить числа $\frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{8}{9}$ в порядке убывания.

2(А). Вычислить

$$\frac{7777777 \cdot 7777777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1} - \frac{5555555 \cdot 5555555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1}.$$

3(А). Какая дробь больше: $\frac{2013}{2014}$ или $\frac{2014}{2015}$?

4(А). В классе 32 ученика. Из них 18 школьников занимаются в математическом кружке, 13 — в химическом, а 7 детей не посещают эти кружки. Сколько химиков увлекается математикой?

5(А). Сумма 2012 натуральных чисел — нечетное число. Каким числом — четным или нечетным является произведение этих чисел?

6(А). Не выполняя действий, установить, правильной или неправильной дробью является число $\frac{377 \cdot 489 - 113}{377 + 489 \cdot 376}$.

7(А). Выразить число 18 с помощью четырех семерок, соединяя их знаками действий.

8. Доказать, что $\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1$, если $abc = 1$.

9(А). Найти наименьшее натуральное число, при делении которого на дроби $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{9}$ в частном получаются целые числа.

10(А). Найти наибольшее число со знаменателем 26, которое больше $\frac{17}{39}$ и меньше 1.

11(А). Вычислить

$$\frac{2 \cdot 2015}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+2015}}.$$

12(А). Найти дробь, которая не изменит своей величины, если к числителю прибавить 17, а к знаменателю 13. Найти общий вид таких дробей.

13(А). К числу 13 приписать справа одну цифру так, чтобы полученное число делилось на 1.

14. Учащихся в 6 классе на 30% меньше, чем учащихся в 5 классе, а в 7 классе на 20% меньше, чем в 6 классе. На сколько процентов в 7 классе меньше учащихся, чем в 5 классе?

15. Сколько раз цифра 7 встречается в записях всех чисел от 40 до 100?

16. Вместо букв поставить цифры так, чтобы получилось верное равенство:

$$\begin{array}{r} \text{К Р О С С} \\ +\ \text{К Р О С С} \\ \hline \text{С П О Р Т} \end{array}$$

17(А). В некотором месяце 3 пятницы пришлись на четные числа. Какой день недели был 4-го числа этого месяца?

18. Число a в 7 раз больше b, а b меньше c в 5 раз. Найти НОК и НОД чисел a, b и c.

19. Дробь обратится в единицу, если к числителю прибавить 2; если же к знаменателю прибавить 3, то дробь обратится в $\frac{1}{2}$. Найти эту дробь.

20(А). К числу 157 добавить справа две цифры так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 36. Найти все такие числа.

21. Если из двузначного числа вычесть сумму его цифр, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти данное число.

22. Расшифровать числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{А И С Т} \\ \times\ \qquad 4 \\ \hline \text{С Т А Я} \end{array}$$

23(А). В клетке находятся фазаны и кролики. У всех животных 20 голов и 66 ног. Сколько в клетке кроликов и сколько фазанов?

24(А). Сколько существует различных прямоугольников с площадью 48 м², стороны которых выражаются целым числом метров?

25(А). Сергей записал на доске два числа. Третье написал равным сумме первых двух, четвертое — сумме третьего и второго и т. д. Затем Сергей сообщил Николаю сумму шести последовательных чисел, начиная с некоторого из написанных. Николай, узнав сумму, сразу же определил одно из написанных чисел. Какое?

26. Как набрать из водоема 3 л воды, имея два сосуда емкостью 5 и 9 л?

27(А). Если к деньгам Сергея прибавить еще 20% этих денег, то получится 9000 рублей. Сколько денег у Сергея?

28(А). Какое число надо прибавить к числителю и знаменателю дроби $\frac{11}{41}$, чтобы получить дробь $\frac{3}{8}$?

29(А). Ученик купил 2 альбома. Первый из них на 50% дороже второго. На сколько % второй альбом дешевле первого?

30. Можно ли вырезать из квадрата 3 × 3 дм круг, длина окружности которого 4π дм?

31(А). В каком двузначном числе удвоенная сумма цифр равна их произведению?

32. Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{К А Ф Т А Н} \\ +\text{К А Ф Т А Н} \\ \hline \text{Т Р И Ш К А} \end{array}$$

33. Решить числовой ребус:

$$\text{ПЧЕЛКА} \times 7 = \text{ЖЖЖЖЖЖ}$$

(одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам).

34(А). Найти двузначное число, равное утроенному произведению его цифр.

35. На какую цифру оканчивается число $7^{777} + 13$?

36(А). Найти все двузначные числа, которые при делении на 7 дают в остатке 5, а при делении на 19 — остаток 9.

37. Доказать, что если $x = \dfrac{a-b}{a+b}$; $y = \dfrac{b-c}{b+c}$; $z = \dfrac{c-a}{c+a}$, то $(1+x)(1+y)(1+z) = (1-x)(1-y)(1-z)$.

38(А). Написать наименьшее пятизначное число, кратное 9, так, чтобы первая цифра его была 5 и все цифры были различны.

39(А). Найти два положительных числа, разность которых равна их частному.

40. Найти наименьшее целое положительное число, которое при делении на 2, 3, 5, 7 и 11 дает в остатке 1.

41(А). Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю дроби $\dfrac{13}{17}$, чтобы она обратилась в $\dfrac{6}{7}$?

42(А). Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} 1\ 7\ 7\ 7 \\ +\ \text{К А Р Л} \\ \hline \text{Г А У С С} \end{array}$$

43(А). Найти наименьшее и наибольшее отрицательные числа из тех, которые можно было бы записать при помощи трех единиц.

44(А). Разрезать прямоугольник со сторонами 16 и 9 см так, чтобы из них можно было сложить квадрат (разрез может быть в виде ломаной линии).

45(А). Является ли число 134 444 431 простым?

46(А). Найти сумму:
$-2013 - 2012 - 2011 - \ldots + 2013 + 2014 + 2015$.

47(А). Какой цифрой оканчивается разность $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 998 \cdot 999 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 997 \cdot 999$?

48(А). Доказать, что дробь $\dfrac{m(m-5)}{2}$ есть целое число при любом натуральном m.

49(А). Найти наименьшее число, записываемое только при помощи единиц и нулей, которое делилось бы на 225.

50(А). Найти два числа, сумма которых 432, а НОД равен 48.

51(А). В трехзначном числе $\overline{abc}$, цифры которого различны, выполняется соотношение $\overline{ab} = a + b + c$. Найти наименьшее трехзначное число.

52(А). Найти x, если

$$(x - (x - (x - \ldots - (x - 1) \ldots))) = 1$$

(в записи содержится 2010 пар скобок).

53(А). Чему равен знаменатель дроби $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2014 \cdot 2015}{20^{10}}$?

54(А). Сравнить дроби $\dfrac{1313}{1717}$ и $\dfrac{13}{17}$.

55. Доказать, что из 26 различных натуральных чисел, не больших 50, можно выбрать 2, из которых одно в 2 раза больше другого. Верно ли это для 25 различных чисел, не больших 50?

56. Цена билета в театр составляла 400 руб. После снижения входной платы число зрителей увеличилось на 25%, а выручка выросла на 12,5%. Сколько стал стоить билет после снижения цены?

57(А). $7 + \dfrac{7}{6} = 7 \cdot \dfrac{7}{6}$ — верное равенство. Сколько существует подобных равенств?

58(А). Можно ли соединить 133 телефона так, чтобы каждый из них был соединен ровно с 5 другими?

59(А). Сумма трех чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть больше 100?

60(А). В записи 7*462* заменить звездочки цифрами так, чтобы полученное число делилось на 12. Указать наибольшее и наименьшее из полученных чисел.

61. Даны три разные отличные от 0 цифры. Из них составляются всевозможные трехзначные числа. Доказать, что их сумма делится на 37.

62(А). Найти последнюю цифру числа 9^{2015}.

63(А). Школьный портфель стоил 600 рублей. Через некоторое время цену увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Какой стала цена портфеля?

64. Каждое из m чисел равно $2n + 3$, а каждое из n чисел равно $5 - 2m$. Среднее арифметическое всех $m + n$ чисел равно 4. Доказать, что $m = n$.

65. К числу 100 и числу 10 дописали справа цифру 1. Какое из чисел увеличилось на большее число процентов?

66(А). По кругу написано 2015 натуральных чисел. Доказать, что найдутся два соседних числа, сумма которых четна.

67. Если к пятизначному числу приписать семерку впереди числа, то полученное шестизначное число будет в 5 раз больше шестизначного числа, у которого семерка приписана в конце. Найти это пятизначное число.

68(А). Найти наименьшее десятизначное число, у которого все цифры различны и которое делится на 4, 5 и 9.

69(А). Масса канистры с бензином 40 кг, без бензина — 2 кг. Какова масса канистры, заполненной бензином наполовину?

70(А). Доказать, что число вида $\overline{aaabbb}$ делится на 37.

71(А). Зарплату учителям повысили на 12%, а через год еще на 20%. На сколько процентов всего увеличилась зарплата?

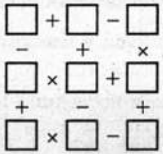
72(А). Указать последнюю цифру числа $2009 \cdot 2010 \cdot 2011 \cdot 2012 \cdot 2013 + 2014^2 \cdot 2015^2$.

73(А). Найти значение выражения $x(1 + y) - y(xy - 1) - xy^2$ при $x + y = -3$; $xy = 1$.

74(А). Используя знаки математических действий и по одному разу каждую из десяти цифр, представить число 8 в виде суммы трех дробных выражений.

75(А). Дан прямоугольник $MNPK$, где $M(-2; -2)$, $N(5; -2)$, $K(5; 3)$, $P(-2; 3)$. Задать с помощью двойного неравенства: а) множество абсцисс всех точек прямоугольника; б) множество ординат всех точек прямоугольника.

76. Вписать в клетки цифры от 1 до 9 так, чтобы результаты действий над числами по горизонтали и по вертикали были одинаковыми и равнялись 13.

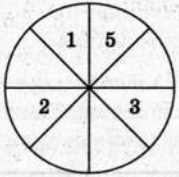


77(А). Из бака отлили $\frac{1}{5}$ часть бензина, потом 15% его общей емкости. После этого в баке осталось 65 л бензина. Какова емкость бака?

78(А). Прямоугольная плитка шоколада разделена углублениями на 4×5 маленьких прямоугольника. Сколько раз нужно разламывать шоколад, чтобы разделить его на эти маленькие прямоугольники?

79. Заполнить пустые секторы подходящими цифрами от 1 до 8 так, чтобы сумма любых двух

чисел, расположенных в противоположных секторах круга, была однозначным числом.



80. Крестьянка продала яйца двум покупателям: первому $\frac{1}{3}$ имевшихся у нее яиц и еще 15 штук, второму $\frac{7}{9}$ остатка и последние 10 штук. Сколько яиц продала крестьянка?

81(А). Если между цифрами двузначного числа вписать 1, то полученное трехзначное число будет в 9 раз больше исходного. Найти это число.

82. Имеется 3 листа бумаги. Некоторые из них разрывают на 3 части. Из полученных листков некоторые снова разрывают на 3 части и т. д. При подсчете оказалось всего 40 листков. Правильно ли был произведен подсчет?

83(А). Который теперь час, если истекшая часть суток равна 60% оставшейся?

84(А). Найти все двузначные числа, половина которых равна сумме своих цифр.

85(А). Восстановить числитель и знаменатель дробей, обозначенных *. Учесть, что возможны различные решения: $\frac{5}{*} - \frac{*}{3} = \frac{1}{6}$.

86(А). В школе 5 шестых классов. В каждом из них учится по 29 учеников. Доказать, что найдутся 13 учеников, родившихся в один месяц.

87(А). Прямоугольник разделен на 4 прямоугольника, площади трех из которых равны 2; 4 и 6 см^2. Найти площадь данного прямоугольника.

2	4
6	

88(А). Отношения двух чисел равно 1 : 3. Если к первому прибавить 25, то их отношение будет равно 2 : 3. Найти эти числа.

89(А). Внуку сейчас 4 года, а дедушке 59 лет. Через сколько лет дедушка будет в 6 раз старше внука?

90(А). Найти наименьшее натуральное число, сумма цифр которого равна 100.

91(А). В химическом кружке, где занимается Руслан, более 89% участников — девочки. Ка-

кое наименьшее количество детей может быть в таком кружке?

92(А). Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1302 цифры. Нумерация начиналась с единицы. Сколько всего страниц в этой книге?

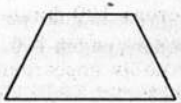
93(А). Доказать, что дробь $\frac{6n+4}{8n+5}$ несократима при любом целом n.

94(А). В одном городе все жители говорят на английском или французском языках. По-французски говорят 85% всех жителей, а по-английски — 75%. Сколько процентов всех жителей этого города говорят на обоих языках?

95(А). Написать в строку 7 чисел так, чтобы сумма любых двух соседних была отрицательной, а сумма всех чисел положительной.

96(А). Разность между двузначным числом и произведением его цифр равна учетверенному произведению суммы его цифр. Найти это число.

97. Разрезать фигуру на 4 равные части.



98. 18 трехметровых бревен распилили на полуметровые поленья. Сколько распилов понадобилось?

99(А). Найти двузначное число, которое равно сумме квадрата числа его десятков и куба числа его единиц.

100. Можно ли в треугольнике провести прямую линию так, чтобы она пересекала все стороны?

101(А). Найти значение суммы:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{256}.$$

102(А). Найти наибольшее трехзначное число, которое в 19 раз больше своих цифр.

103(А). Который сейчас час, если оставшаяся часть суток равна $1\frac{2}{5}$ прошедшей?

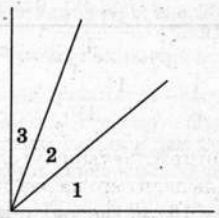
104(А). Толщина книги в 120 листов — 1 см. Какова толщина книги, если в ней 720 страниц?

105. Бассейн наполняется первой трубой за 5 ч, а через вторую трубу он может быть опорожнен за 6 ч. Через сколько часов будет наполнен бассейн, если одновременно открыть две трубы?

106. В ряду стоят 100 фишек. Разрешается поменять местами любые 2 фишки, стоящие через одну. Можно ли переставить все фишки в обратном порядке?

107(А). Установить закономерность в последовательности и записать еще 3 числа:
5; 6; 13; 29; ... .

108(А). Прямой угол разделен на три части так, что величина второго угла на 10° больше третьего и на 10° меньше первого угла. Найти градусную меру каждого из углов.



109(А). Какое наибольшее число прямоугольников размером 1×3 можно вырезать из квадрата размером 5×5?

110(А). Произведение двух взаимно простых чисел равно 200. Найти эти числа.

111(А). Найти число, 4,8% которого равно

$$\frac{15\frac{13}{29}\cdot 3{,}625+28:\frac{7}{15}}{\frac{20}{49}\cdot 9{,}8+0{,}625:0{,}75}.$$

112(А). Сергею и Николаю вместе 35 лет. При этом Николаю вдвое больше лет, чем было Сергею, когда Николаю было столько лет, сколько Сергею сейчас. Сколько лет Сергею?

113(А). Можно ли число 91 представить в виде суммы нескольких чисел, произведение которых также равно 91?

114. Разделить 125 на четыре части так, чтобы первая часть относилась ко второй, как 1 : 3, вторая к третьей, как 3 : 5, а третья к четвертой, как 5 : 6.

115. Вычислить: $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}}$.

116(А). Периметр четырехугольника равен 32 см. Диагональ делит его на два треугольника с периметром 28 и 16 см. Найти длину диагонали.

117(А). Разность между двузначным числом и произведением его цифр равна квадрату числа единиц. Найти все такие числа.

118(А). Число 21 разделить пропорционально числам $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

119(А). Найти наименьшее десятизначное число, кратное 7, все цифры в десятичной записи которого различны.

120(А). На сколько третья часть числа больше его четвертой части и во сколько раз?

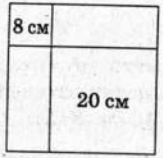
121(А). Натуральные числа x и y таковы, что $13x = 31y$. Доказать, что $x + y$ — составное.

122(А). Разрезать квадрат размером 6 × 6 по сторонам клеток на 7 различных прямоугольников.

123(А). Какая правильная дробь увеличится в 7 раз, если к ее числителю прибавить знаменатель?

124. Найти остаток от деления 7100 на 6.

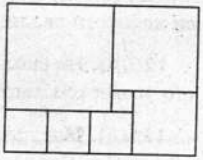
125(А). Квадрат разбит на прямоугольники, периметры двух из них указаны на рисунке. Найти длину стороны квадрата.



126(А). Сколько среди чисел от 1 до 50 включительно таких, которые записаны только нечетными цифрами?

127(А). В доме 123 жильца, им вместе 3813 лет. Можно ли выбрать 100 из них, которым вместе не меньше 3100 лет?

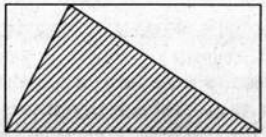
128(А). Прямоугольник разбит на квадраты. Чему равна площадь прямоугольника, если длина стороны самого маленького квадрата равна 1 см?



129(А). Как изменится величина дроби, если числитель увеличить на 50%, а знаменатель уменьшить на 50%?

130(А). Периметр равнобедренного треугольника 18 см. Одна его сторона равна 5 см. Найти длины остальных сторон.

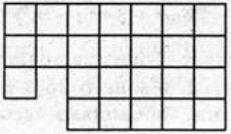
131(А). Площадь заштрихованного треугольника равна 9 см². Найти площадь прямоугольника.



132(А). Сколько процентов составляет НОК (16; 72) от НОД (16; 72)?

133(А). Можно ли из квадрата 20 × 20 см вырезать круг, длина окружности которого 30π см?

134. Разрезать фигуру по сторонам клеток так, чтобы из них можно было составить квадрат.



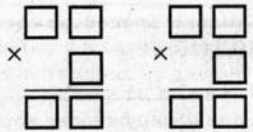
135(А). Доказать, что $ax + 3x + 4ay + 12y + 9 = a^2$, если $a - 3 = x + 4y$.

136(А). Наименьшее общее кратное двух чисел равно 240, а их наибольший общий делитель равен 8. Найти эти числа, если известно, что меньшее из чисел содержит только один множитель, не входящий в большее число.

137(А). Найти дробь со знаменателем 17, которая больше $\frac{5}{7}$, но меньше $\frac{6}{7}$.

138(А). Доказать, что число $\overline{abba}$ делится на 11.

139. Вписать в квадратики цифры от 1 до 9 без повторения так, чтобы получилось два верных примера на умножение. Найти все решения.



140(А). Разделить круг тремя прямыми на 7 частей.

141(А). Доказать, что при любых m и n $(7m - 21n - 7)(m^4 + 3m^4n - m^5) \le 0$.

142(А). Солдат Кузнецов почистил ведро картошки за 3 часа, и у него 25% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он начистит такое же ведро картошки?

143(А). Вычислить:

$$\frac{555555 \cdot 555555}{1+2+3+4+5+4+3+2+1} - \frac{444444 \cdot 444444}{1+2+3+4+3+2+1}.$$

144(А). Найти значение выражения $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 3$, если $x^2 - x = 1$.

145(А). Цена книги снизилась на $\frac{1}{3}$ ее стоимости. Во сколько раз прежняя цена больше новой?

146(А). Длина стальной проволоки 1 м. Разрезать проволоку пополам стоит 5 рублей. Сколько нужно заплатить, чтобы разрезать ее на 10 равных частей?

147(А). Расшифровать запись сложения (одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры).

$$\begin{array}{r} \text{К Н И Г А} \\ +\ \text{К Н И Г А} \\ \hline \text{К Н И Г А} \\ \hline \text{Н А У К А} \end{array}$$

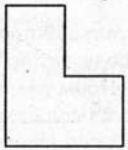
148(А). Сколько процентов составляет часть, отрезанная от веревки длиной 25 м, если отношение отрезанной части к той, что осталась, равно 2 : 3?

149(А). Девять одинаковых альбомов стоят меньше 1000 рублей, а десять таких же альбомов стоят больше 1100 рублей. Сколько стоит один альбом?

150(А). Скорость автобуса от A до $Б$ составляла 60 км/ч, а от $Б$ до A — 40 км/ч. Чему равна средняя скорость автобуса?

151(А). При каких значениях x значение дроби $\frac{3}{|x-4|}$ равно 1?

152. Разделить фигуру на 4 равных, подобных заданному.



153(А). Решить уравнение $|x| = \frac{x}{3} + 3$.

154(А). Решить уравнение
$0{,}3 - 0{,}03x = 0{,}001 - 0{,}0007$.

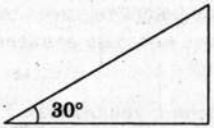
155. В числовом ребусе заменить буквы цифрами так, чтобы получилось верное равенство. Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам.

$$\begin{array}{r} \text{В А Г О Н} \\ +\ \text{В А Г О Н} \\ \hline \text{С О С Т А В} \end{array}$$

156(А). Какая цифра стоит в конце числа возрастающего произведения $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 17 \cdot 19$?

157. Часы показывают 12 часов. Какой величины будет угол между минутной и часовой стрелками через 5 минут?

158. Разделить прямоугольный треугольник с острым углом в 30° на 3 равных треугольника.



159(А). Сколько раз к наибольшему двузначному числу нужно прибавить наибольшее трехзначное число, чтобы получить наибольшее пятизначное?

160(А). Является ли целым числом частное НОК (a, b, c) : НОД (a, b, c)?

161(А). Найти наименьшее трехзначное число, произведение цифр которого равно 70.

162(А). Сумма двух чисел равна 85, а их наименьшее общее кратное 102. Найти эти числа.

163. Делится ли разность двух неравных чисел на НОД этих чисел?

164(А). До конца суток осталось $\frac{1}{5}$ этого времени, которое прошло от начала суток. Который час в данный момент?

165. Какую цифру нужно дописать справа к числу 250, чтобы образованное четырехзначное число имело два простых делителя, оканчивающихся дописанной цифрой?

166(А). Сколько среди чисел от 1 до 30 включительно таких, которые записаны только четными цифрами?

167. Три дроби с числителем 1 и различными знаменателями (натуральными) дают в сумме 1. Найти эти дроби.

168(А). Для числа 789 найти такое трехзначное число, разность между которым и данным делилась бы на 9 и на 99.

169(А). Сколько существует различных прямоугольников с площадью 18 см², стороны которых выражаются целым числом сантиметров?

170(А). Можно ли записать миллион в виде произведения двух чисел, в записи которых не было бы ни одного нуля?

171(А). Найти наибольшее десятизначное число, кратное 45, у которого все цифры различны.

172(А). Как изменится величина дроби, если числитель увеличить на 300%, а знаменатель уменьшить на 50%?

173. Из трех различных и отличных от нуля цифр составляются всевозможные трехзначные числа. Доказать, что их сумма делится на 37.

174(А). Найти наименьшее число, которое записано только единицами и делится на 77.

175(А). Одна сторона прямоугольника на 30% больше стороны квадрата, другая — на 30% меньше стороны того же квадрата. Найти процентное отношение площади прямоугольника к площади квадрата.

176(А). Чему равно значение выражения $7x^4 + 27x^2y^2 + 26y^4 + y^2$, если $x^2 + 2y^2 = 1$?

177. Восстановить зашифрованные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{ЛЕТО} \\ +\ \text{ЛЕТО} \\ \hline \text{ПОЛЕТ} \end{array}$$

178(А). Уменьшаемое на 20% больше вычитаемого. Сколько процентов составляет разность от уменьшаемого?

179. Заполнить пустые клетки так, чтобы сумма чисел в трех любых соседних клетках как по вертикали, так и по горизонтали равнялась 12.

	5						
					1		
6							
			2				

180(А). Вычислить наиболее простым способом:
$\frac{1}{13\cdot14}+\frac{1}{14\cdot15}+\frac{1}{15\cdot16}+\ldots+\frac{1}{99\cdot100}$.

181(А). Найти правильную дробь, которая увеличится в 5 раз, если к ее числителю прибавить ее знаменатель.

182(А). На сколько сумма всех четных чисел первой тысячи больше суммы всех нечетных чисел той же тысячи?

183. Делители числа 6 (не считая самого числа) это: 1, 2 и 3. Их сумма 1 + 2 + 3 = 6 равна самому числу. Существует ли двузначное число, обладающее указанным свойством?

184(А). В пределах первой сотни найти все пары простых чисел, разность между которыми тоже простое число.

185(А). Подобрать вместо точек такие цифры, чтобы число 1...08 было точным квадратом.

186. Машины часы опаздывают каждый час на 2 минуты. Если по радио передают сигнал 12 часов, то через сколько времени на часах Маши будет 12 часов, если ее часы показывали точное время ровно 5 часов тому назад?

187(А). Количество учеников можно разбить на звенья по 5 и по 7 человек. Сколько учеников в классе, если их больше 30 и меньше 40?

188. На какое наименьшее число нужно умножить 12 345 679, чтобы полученное число состояло из одних пятерок?

189. В актовом зале собрались школьники: мальчики и девочки. Их было больше 70, но меньше 90. Всего скамеек, на которых сидели школьники, было на 1 больше, чем сидело на каждом из них мальчиков. Девочки сидели по одной на каждой скамейке. Сумма числа скамеек и мальчиков составляла число школьников. Сколько школьников находилось в зале и на скольких скамейках они сидели?

190(А). Число a в 6 раз больше b, а b меньше c в 4 раза. Найти НОК и НОД чисел a, b, c.

191. Из-под земли бьют 4 источника. Первый заполняет бассейн за 1 день, второй — за 2 дня, третий — за 3 дня и четвертый — за 4 дня. За сколько времени наполнят бассейн все 4 источника вместе?

192. В ящике лежат груши трех сортов. Каково наименьшее количество груш, которое надо взять наугад из ящика, не заглядывая в него, чтобы среди вынутых оказались хотя бы две груши одного сорта?

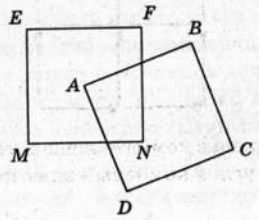
193. Некто, умирая, завещал: «Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано $\frac{2}{3}$ имения, а жене — вся остальная часть. Если же родится дочь, то ей — $\frac{1}{3}$, а жене — $\frac{2}{3}$». Родилась двойня — сын и дочь. Как же разделить имение?

194(A). Сумма двух чисел равна 221, а их наименьшее общее кратное 612. Найти эти числа.

195. 30 птиц стоят 30 монет, куропатки стоят по 3 монеты, голуби — по 2 и пара воробьев — по монете. Спрашивается, сколько птиц каждого вида?

196(A). Найти наименьшее натуральное число, при делении которого на дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{7}{8}$ в частном получаются целые числа.

197(A). Вершина A квадрата $ABCD$ расположена в центре квадрата $MNFE$, а сторона AB от-



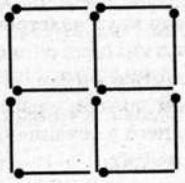
секает третью часть стороны FN. Найти площадь общей части.

198(A). Найти дробь, которая не изменит своей величины, если к числителю прибавить 2015, а к знаменателю 2014.

199(A). Доказать, что рациональное число $\frac{3}{5}$ можно представить как конечную сумму различных дробей с числителями, равными единице.

200(A). Чтобы определить расстояние от дома до школы, Сергей шел равномерным шагом и полпути считал шаги парами, а полпути — тройками, причем пар получилось на 250 больше, чем троек. Сколько шагов до школы?

201. Из 12 спичек выложены 4 одинаковых квадрата; при этом образовался еще один большой квадрат. Отобрать 2 спички, не трогая остальных, чтобы получилось 2 неравных квадрата.



202. Сколько в комнате кошек, если в каждом из четырех углов комнаты сидит по одной кош-

ке, против каждой кошки сидит по 3 кошки и на хвосте у каждой сидит по кошке?

203. Записать число 1000 при помощи восьми восьмерок, пользуясь только сложением.

204. В доме 6 этажей. Во сколько раз путь по лестнице на шестой этаж длиннее, чем путь по той же лестнице на третий этаж?

205. Сумма двух чисел, образованных из цифр 1, 3, 5, 7 и 9, равна сумме двух чисел, образованных из цифр 2, 4, 6 и 8. Найти эти числа, используя каждую цифру по одному разу.

Примечание. Неправильные дроби не применять.

206(А). На окраску куба размерами $2 \times 2 \times 2$ требуется 5 г краски. Сколько краски потребуется на покраску куба размером $8 \times 8 \times 8$?

207(А). Сравнить числа x и y, если 7,5% числа x равна 6,5% числа y.

208. Два поезда идут навстречу друг другу по параллельным путям: один со скоростью 40 км/ч, другой со скоростью 50 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шел мимо него в течение 6 секунд. Какова длина первого поезда?

209. Рассадить 13 кустов роз в 12 рядов по 3 куста в каждом ряду.

210(А). К числу 100 и к числу 10 дописали справа цифру 1. Какое из чисел увеличилось на большее число процентов?

211(А). Одно число в 10 раз больше другого. Во сколько раз НОК этих чисел больше их НОД?

212. Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы ее за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров съели бы всю траву луга за 96 дней?

213(А). Железный кубик весит 1 кг. Сколько весит железный кубик, ребра которого в 5 раз меньше ребер данного кубика?

214(А). На дне рождения было 20 танцующих. Мария танцевала с семью танцорами, Ольга — с восьмью, Вера — с девятью и т. д. до Нины, которая танцевала со всеми танцорами. Сколько танцоров (ребят) было на вечеринке?

215(А). Сумма двух чисел равна 146. Если у одного из них зачеркнуть цифру единиц, равную 3, то получим второе число. Найти эти числа.

216. В корзине были яблоки. Сначала из нее взяли половину яблок без 5 яблок, затем $\frac{1}{3}$ оставшихся яблок и еще 4 яблока, после чего осталось 12 яблок. Сколько яблок было в корзине?

217. На какое наименьшее число нужно умножить 333 667, чтобы получить число, состоящее из одних восьмерок?

218(А). Имеется 7 палочек длиной 1 см, 9 палочек 2 см и 13 палочек длиной 4 см. Можно ли из всех палочек этого набора сложить прямоугольник?

219(А). Доказать, что разность между любым трехзначным числом и суммой его цифр делится на 3.

220(А). Два товарных поезда, оба длиной по 250 м, идут навстречу друг другу с одинаковой скоростью 45 км/ч. Сколько секунд пройдет после того, как встретились машинисты, до того, как встретятся бригадиры последних вагонов?

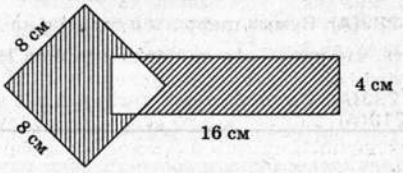
221. На какое наибольшее число частей можно разрезать круглый торт пятью прямолинейными разрезами?

222(А). Решить уравнение $|-0{,}21| : |x| = |-0{,}3|$.

223. К числу 157 добавить справа две цифры так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 36. Найти все такие числа.

224(А). Сергей и Николай вместе весят 92 кг, Сергей и Костя весят 95 кг, а Николай и Костя весят 97 кг. Сколько весят вместе Сергей, Николай и Костя?

225(А). Прямоугольник со сторонами 4 и 16 см наложили на квадрат со стороной 8 см (см. рис.). Доказать, что площади заштрихованных частей данных фигур равны.



226(А). Дана пропорция $\frac{x-3}{x-2} = \frac{x+1}{x+3}$. Найти x.

227(А). Разность между двузначным числом и суммой его цифр дает число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти первоначальное число.

228(А). Двузначное число оканчивается цифрой 7. Если ее перенести в начало числа, то получившееся число будет на 3 больше, чем учетверенное первоначальное. Найти первоначальное число.

229(А). Доказать, что между числами 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$ нельзя расставить знаки «+» и «−» так, чтобы значение выражения было равно 0.

230(А). Мишка съедает банку варенья за 2 минуты, заяц за 5 минут, а лиса за 10 минут. За сколько минут они съедят банку варенья вместе?

231(А). Пусть сумма трех последовательных чисел равна A, а сумма следующих трех за ними натуральных чисел — B. Может ли произведение AB равняться 777 777 777?

232(А). Сумма цифр a и b делится на 13. Доказать, что число $\overline{aba}$ также делится на 13.

233(А). Расшифровать числовой ребус:

$$\text{СОН} : \text{ОН} = 5$$

(одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры).

234(А). В меню столовой имеется 4 первых, 6 вторых и 3 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

235(А). На столе 23 стакана: 6 вверх дном, 17 вниз дном. За один ход разрешается взять любые два стакана и перевернуть их. Можно ли за несколько таких ходов добиться того, чтобы все стаканы стояли вверх дном?

236(А). Найти хотя бы одно решение ребуса

$$\text{СЕЛ} \times \text{СЕЛ} = \text{ПОДСЕЛ}$$

(одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные).

237. Ученику выставили годовые оценки по 12 предметам. Его средний балл оказался равен 3,5. По скольким предметам ему надо повысить свои оценки на 1 балл, чтобы средний балл стал равен 4?

238(А). Найти 7 последовательных целых чисел, сумма первых трех из которых равна сумме остальных четырех.

239(А). Если в трехзначном числе $\overline{abc}$ сложить все возможные двузначные числа, образованные из цифр этого числа, то получится трехзначное число $\overline{acb}$. Найти исходное число.

240. Пятизначное число, являющееся точным квадратом, записывается при помощи цифр 0; 1; 2; 2; 2. Найти это число.

241(А). Несколько кошек съели 157 мышек, причем все кошки съели по одинаковому числу мышек. Сколько было кошек, если каждая кошка съела больше мышек, чем было кошек?

242(А). В классе провели контрольную работу по математике. Средняя оценка мальчиков – 3,8; девочек – 3,5; класса — $3\frac{8}{13}$. Сколько человек писало контрольную, если их больше 20 и меньше 30?

243(А). От пола комнаты вертикально вверх по стенке ползли два паука. Поднявшись до потолка, они поползли обратно. Первый поднимался и спускался с одной и той же скоростью, второй поднимался втрое медленнее первого, а спускал-

ся — втрое быстрее. Какой из пауков спустился быстрее?

244(А). Заменить в числе 76*4*8 звездочки цифрами так, чтобы оно делилось на 72. Указать все такие числа.

245(А). Зарплата служащего увеличилась на 10%, а через некоторое время еще на 15%. На сколько процентов всего увеличилась зарплата?

246(А). Волк и заяц купили футбольный мяч за 2500 руб. У зайца было в 2 раза меньше денег, чем у волка, да еще 100 рублей. Сколько денег внес каждый из них?

247(А). Найти все двузначные числа, которые одновременно являются квадратами и кубами.

248(А). Найти длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

249(А). 17 учеников собрали 100 арбузов. Доказать, что какие-то два из них собрали одинаковое число арбузов.

250(А). Найти сумму
$-1004 - 1003 - 1002 - 1001 - ... + 1004 + 1005 + 1006$.

251(А). *Дано:* $100 = 100 + 98 + 96 + ... + x$. Сколько слагаемых расположено в правой части равенства?

252(А). В книге 160 страниц. В I день ученик прочитал $\frac{1}{4}$ всей книги, во II день прочитал 65% остатка, а в III день — остальную часть книги. По сколько страниц книги ученик читал каждый день?

253(А). Два поезда вышли в разное время навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 1231 км. Скорость первого поезда 50 км/ч, а второго — 59 км/ч. Пройдя расстояние 700 км, первый поезд встретился со вторым. На сколько часов один из них вышел раньше другого?

254(А). Сплав состоит из золота и меди. Масса меди относится к массе золота как 3 : 5. Определить массу золота в сплаве, зная, что масса меди в нем равна 60 г.

255(А). В школе 29 классов, 1000 учеников. Есть ли в школе класс, в котором меньше 35 учеников?

256(А). На окраску куба размером $3 \times 3 \times 3$ необходимо 3 г краски. Сколько краски пойдет на окраску куба размером $6 \times 6 \times 6$?

257(А). 79 лошадей разместили в 13 конюшнях. Почему хотя бы в одной конюшне будет обязательно нечетное число лошадей?

258(А). Имеются 5 кубиков, которые отличаются друг от друга только цветом: 2 красных,

1 белый и 2 черных. Есть два ящика A и B, причем в A помещается 2 кубика, а в B — 3 кубика. Сколькими различными способами можно разместить эти кубики в ящиках A и B?

259(А). Разделить число 1025 обратно пропорционально числам:

$$\frac{1}{3};\ 0{,}8;\ 2\frac{1}{4};\ 1.$$

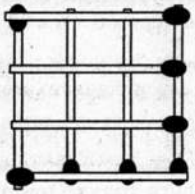
260(А). Произведение трехзначного числа на 6 есть куб натурального числа. Найти все такие числа.

261(А). Сколько цифр содержит число 777...77, если известно, что оно кратно 19?

262(А). Существует ли наибольшее и наименьшее 10-значное число, кратное 19, в записи которого каждая цифра используется 1 раз?

263(А). Доказать, что при любом a выражение $(a^2 - 3a)$ делится на 2.

264. Фигура, изображенная на рисунке, состоит из 8 спичек, наложенных друг на друга. Снять две спички так, чтобы осталось 3 квадрата.



265. Из «Греческой антологии»:

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил философ, — половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

266(А). Вычислить наиболее рациональным способом

$$\frac{7}{17}\left(3\frac{2}{5}\cdot 6\frac{3}{7}+3\frac{4}{7}\cdot 3{,}4\right).$$

267(А). Решить уравнение $x^3 + x^2 = 0$.

268(А). На трех полках лежат 52 книги. Если 3 книги с третьей полки переложить на вторую, то на первой и третьей полках книг станет поровну, а на второй вдвое больше, чем на первой. Сколько книг было на каждой полке?

269(А). Дана дробь $\frac{13}{79}$. Какое число нужно прибавить к числителю и знаменателю, чтобы она обратилась в $\frac{1}{3}$?

270(А). Длина окружности равна 10π м. Найти площадь круга, ограниченного этой окружностью.

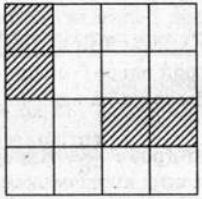
271(А). Точка C отмечена на отрезке $MN = 13$ см так, что $MC - CN = 5$ см. Найти длину MC и CN.

272(А). Делится ли число $7^2 + 56^2$ на 7?

273(А). Сколько процентов составляет НОД (12; 24) от НОК (12; 24)?

274. В трех шестых классах 102 ученика. Число учеников класса «Б» составляет $\frac{8}{9}$ числа учеников класса «А», а число учеников класса «В» равно $\frac{17}{16}$ числа учеников класса «Б». Сколько учеников учится в каждом классе?

275. Разрезать квадрат по линиям сетки на 4 одинаковые части так, чтобы каждая часть содержала по одной закрашенной клетке.



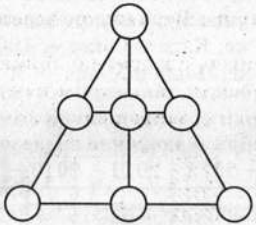
276. Расшифровать ребус:

$$\begin{array}{r} \text{В О П Р О С} \\ + \text{В О П Р О С} \\ \hline \text{Т Р О Й К А} \end{array}$$

277. Переставить местами две цифры так, чтобы число в одной строке было бы в 2 раза больше, чем в другой строке.

5	8	1	3	2
4	9	0	6	7

278. Расположить в кружках числа от 1 до 7 так, чтобы сумма чисел по каждой прямой, содержащей три круга, была одна и та же.



279. Как с помощью 7-литрового ведра и 3-литровой банки налить в кастрюлю ровно 5 л воды?

280(А). Торговец продает орехи двух сортов: по 180 руб. и по 120 руб. за килограмм. Он хочет получить 90 кг смеси по 150 руб. за килограмм. Сколько потребуется орехов каждого сорта?

281(А). Найти все дроби со знаменателем 12, которые больше $\frac{5}{6}$ и меньше 1.

282(А). Расставить числа $\frac{2011}{2012}$; $\frac{2012}{2013}$; $\frac{2013}{2014}$; $\frac{2014}{2015}$ в порядке убывания.

283(А). В школе 32 класса, 1050 учеников. Найдется ли класс, в котором меньше 33 учеников?

284(А). Произведение двух взаимно простых чисел равно 24 543. Чему равно наименьшее общее кратное этих чисел? Найдите эти числа.

285(А). Маша и Вера вместе весят 50 кг, Вера и Катя — 60 кг, Катя и Саша — 100 кг, Саша и Паша — 110 кг, Паша и Маша — 70 кг. Сколько весит Маша?

286(А). Найдите значение выражения $2014 - 2013 + 2012 - 2011 + 2010 - \ldots + 2 - 1$.

287(А). Можно ли выбрать из таблицы 5 чисел, сумма которых делилась бы на 40?

11	11	11
13	13	13
15	15	15
17	17	17

288(А). На сколько сумма всех четных чисел первой тысячи больше суммы всех нечетных чисел этой тысячи?

289(А). Трое учеников решили переплыть на другой берег реки на лодке, выдерживающей нагрузку до 120 кг. Как перебраться ученикам на другой берег, если их масса равна 50 кг, 60 кг, 80 кг?

290(А). 12 учеников обменялись рукопожатиями. Сколько всего было рукопожатий?

291(А). Три одинаковых персика надо разделить пополам между четырьмя детьми. Как это сделать, выполнив наименьшее число разрезаний?

292(А). Во сколько раз лестница с первого этажа на семнадцатый длиннее лестницы с первого на пятый этаж дома?

293(А). Из трех одинаковых кубиков с ребром 1 см составили прямоугольный параллелепипед. Найдите площадь его поверхности.

294(А). Артур и Георгий купили лотерейные билеты с номерами: 726 627 и 718 654, и с удивлением обнаружили, что в каждом из номеров можно расставить знаки арифметических действий и скобки так, что в каждом случае получится 100. Как это можно сделать?

295(А). В шахматном турнире участвовали 9 человек. Каждый участник сыграл с остальными по одной партии. Сколько партий было сыграно?

296(А). Множимое увеличили на 10%, а множитель уменьшили на 10%. Как изменилось произведение?

297(А). Кузнечик прыгает по прямой большими и малыми прыжками. Большой прыжок составляет 10 см, малый — 6 см. Как ему попасть из точки M в точку N, находящуюся от нее на расстоянии 2 см?

298. Сколько маршрутных такси должно быть на линии длиной 8 км для обеспечения 10-минутного интервала их движения, если средняя скорость маршрутки 30 км/ч?

299. В некотором году 1 января пришлось на понедельник, а 1 октября — на вторник. Какой это год: простой или високосный?

300. Какое наибольшее количество месяцев одного года может иметь по 5 пятниц?

Раздел II

ОТВЕТЫ. УКАЗАНИЯ. РЕШЕНИЯ

5 класс

1. *Решение.* $\dfrac{1915\cdot 2015-100}{1915+2015\cdot 1914}=$

$=\dfrac{1914\cdot 2015+2015-100}{1914\cdot 2015+1915}=1$, т. е. дробь неправильная.

2. *Ответ:* $\dfrac{2014}{2015}$.

3. Не существуют, поскольку произведение трех множителей — нечетное число, то каждый из множителей должен быть нечетным, но если m и n — нечетны, то $m-n$ — четно. Противоречие.

4. *Решение.* $3+7=10$; $2+6=8$; $4+5=9$, или $4+6=10$; $3+5=8$; $2+7=9$.

5. *Ответ:* на 8,9%.

6. *Решение.* Условие задачи коротко запишем так:

$4у+5г=4100$,

$5у+4г=4000$.

Вес 9 утят и 9 гусят будет равен 4100 + 4000 = = 8100 (г), значит, вес 1 утенка и 1 гусенка равен 8100 : 9 = 900 (г), тогда вес 4 утят и 4 гусят будет 900 · 4 = 3600 (г). Сравнение полученного результата со вторым условием показывает, что 1 утенок весит 4000 − 3600 = 400 (г).

7. *Решение.* 17 + 6 + 13 = 36. По условию каждый спортсмен в этой сумме сосчитан дважды, значит, всего спортсменов 36 : 2 = 18.

8. *Решение.* Заполняем 5-литровый сосуд. Из него переливаем 3 л в 3-литровый сосуд и затем эти 3 л выливаем в раковину. Оставшиеся в 5-литровом сосуде 2 л воды выливаем в 3-литровый сосуд. Затем снова заполняем 5-литровый сосуд водой и из него переливаем 1 л в 3-литровый сосуд. В большом сосуде осталось ровно 4 л.

9. *Решение.* Нет. В каждом рукопожатии используют две руки, значит, общее число рук должно быть четным, но у 13 марсиан 3 · 13 = 39 рук — число нечетное.

10. *Решение.* За каждые два часа гусеница поднимается на 10 − 4 = 6 см. Значит, за 10 ч она поднимется на 6 · 5 = 30 см и за одиннадцатый час еще на 10 см. Всего за 11 часов гусеница поднимется на 30 + 10 = 40 см.

11. *Ответ:* через 15 мин.

12. *Решение.* Всякое трехзначное число можно записать в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где a — цифра сотен, b — десятков, c — единиц. Согласно условию задачи имеем:

$\overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx} =$

$= 222(x + y + z) = 5328$, откуда $x + y + z = 24$.

Заметим, что существует единственная тройка различных однозначных чисел, сумма которых равна 24. Это числа 7, 8, 9.

13. *Указание.* Одно из чисел равно 1, а другое — произвольное натуральное число.

14. *Ответ:* 342 457 + 342 457 = 684 914.

15. *Ответ:* 2 854 106.

Указание. Удобно предварительно рассматривать случаи, когда зачеркивается одна или две цифры.

16. *Решение.*

3	5	5	3	5	5	3	5
4	8	1	4	8	1	4	8
6	0	7	6	0	7	6	0
3	5	5	3	5	5	3	5

Прежде всего заметим, что все числа как по вертикали, так и по горизонтали повторяются через две клетки, поскольку сумма трех чисел (по условию) равна 13.

17. *Ответ:* цифрой 3.

18. *Ответ:* 500 и 2000.

19. *Ответ:* на 16 частей.

20. *Ответ:* дроби равны.
Указание. 131 313 = 13 · 10 101;
1313 = 13 · 101 и т. д.

21. *Решение.* $10a + b = 13a$, где a — цифра десятков, b — единиц. Тогда $b = 3a$, откуда имеем 3 числа: 13; 26 и 39.

22. *Ответ:* 2520.

23. *Указание.* Нечетными могут быть одно или три, а произведение в этих случаях будет четным числом.

24. *Ответ:* 2309 + 2309 = 4618.

25. *Решение.* $(4 \cdot 12 + 18) : (6 + 3) = 7\frac{1}{3}$.

26. *Ответ:* 240 руб.

27. *Ответ:* 4 руб., 5 руб., 8 руб.

28. *Решение.* Если бы в каждом классе учились по одному ученику, то учеников было бы 22, на самом же деле их 23.

29. *Ответ:* 702.

30. *Решение.* Припишем к данному числу 2010 два нуля. Получим 201 000. Если это число разделим на 47, то в частном получим 4276 и в остатке 28, т. е. имеем: 201 000 = 47 · 4276 + 28.

Чтобы искомое число разделилось на 47, необходимо прибавить еще 47 − 28 = 19. А это значит, что последние цифры искомого числа будут равны 1 и 9.

31. *Ответ:* 6 ч.

32. *Решение.* Сравнить дроби $\frac{29}{37} = \frac{29 \cdot 5}{37 \cdot 5} = \frac{145}{185} > \frac{145}{187}$.

33. *Решение.* Пусть отец будет втрое старше сына через x лет. Тогда получим уравнение $3(7 + x) = 37 + x$, откуда находим $x = 8$.
Ответ: через 8 лет.

34. *Решение.* За 1 ч 4 землекопа выкопают 1 яму, а 8 землекопов за 1 ч выкопают 2 ямы. Следовательно, за 6 часов эти же 8 землекопов выкопают 2 · 6 = 12 ям.
Ответ: 12 ям.

35. *Решение.* В сутках 24 часа, тогда 80 ч = 3 · 24 ч + 8 ч = 3 суток + 8 ч. Значит яхта вернется в пятницу в 20.00 ч.

36. *Ответ:* уменьшится на 16%.

37. *Ответ:* может.
1) 12 · 3 + 16 · 4 = 100;
2) 12 · 7 + 16 · 1 = 100;
3) 18 · 2 + 16 · 4 = 100.

38. *Решение.*

1) 8 − 7 = 1;	3 + 6 = 9;	20 : 4 = 5.
2) 8 − 1 = 7;	6 + 3 = 9;	5 · 4 = 20.
3) 1 + 7 = 8;	9 − 3 = 6;	20 : 5 = 4, и т. д.

39. *Решение.* $123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321 = (123 + 321) + (132 + 312) + (213 + 231) = 444 \cdot 3 = 1332$,
или $(123 + 312 + 231) + (132 + 321 + 213) = 666 \cdot 2 = 1332$.

40. *Решение.* Пусть a — уменьшаемое, b — вычитаемое и c — разность, т. е. $a - b = c$, или $a = b + c$. По условию $a + b + c = 2014$, тогда $a + a = 2014$, $2a = 2014$. $a = 1007$.
Ответ: 1007.

41. *Ответ:* 9 учащихся.

42. *Ответ:* $4940 + 7940 = 12\,380$.

43. *Ответ:* 111 111.

44. *Ответ:* 4 брата и 3 сестры.

45. *Решение.* Среди натуральных чисел от 1 до 100 имеется ровно 20, которые делятся на 5 (в каждом десятке по 2), из них лишь 4 числа делятся на $5 \cdot 5 = 25$. Значит, 24 произведения чисел $2 \cdot 5$ образуют 24 нуля.

46. *Ответ:* 15 раз.

47. *Ответ:* 3 способа. Например, 8 отрезков по 11 см и 4 отрезка по 3 см (остальные 2 способа предоставляем читателю).

48. *Решение.* I взвешивание. Положим на части весов любые две монеты. Если весы в равновесии, то выбранные монеты настоящие.

В противном случае настоящими будут другие две монеты.

II взвешивание. Возьмем одну из настоящих монет и одну из другой пары. В зависимости от состояния весов, рассуждая аналогично, указываем фальшивую монету. Следовательно, фальшивую монету можно определить за два взвешивания.

49. *Решение.* НОК этих чисел большее из них, а НОД — меньшее. Поэтому НОК больше НОД этих чисел в 13 раз.

50. *Ответ:* в 1980 г.

51. *Решение.* Каждому маршруту из A в $Б$ соответствует 5 различных маршрутов из $Б$ в $В$. Значит, города A и B соединяют $3 \cdot 5 = 15$ различных маршрутов через город $Б$.

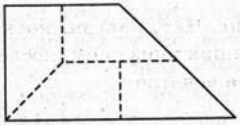
52. *Ответ:* 9.

53. *Ответ:* 5.

54. *Решение.* Заметим, что если два числа имеют одинаковую четность, то их разность будет числом четным; если же одно из чисел четное, а другое — нечетное, то их разность — число нечетное. Следовательно, после каждой операции количество нечетных чисел сохраняется или уменьшается на 2. Первоначально написаны 1007 нечетных чисел, после каждой операции остается нечетное число нечетных чисел, значит, в конце записи останется одно нечетное число.

55. *Ответ:* 8.

56. *Решение.*



57. *Решение.* Всякое трехзначное число можно представить в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где a — цифра сотен, b — десятков, c — единиц. Согласно условию $b = a + c$, тогда имеем:

$100a + 10b + c = 100a + 10(a + c) + c = 110a + 11c = 11(10a + c)$ — кратно 11.

58. *Ответ:* $a = 8$.

59. *Ответ:* 3.

60. *Указание.* $\dfrac{(10a+b)-(a+b)}{a} = 9$, где $10a + b$ — двузначное число, a — цифра десятков, b — единиц.

61. *Ответ:* 29.

62. *Решение.* Если число делится на 72, то оно делится на 8 и на 9. Чтобы оно делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, составленное из трех последних цифр. Для числа 15* это 152, т. е. последняя цифра 2. Получим число 13*269152. Применяя признак

делимости на 9, находим, что числу * соответствует число 7.

Ответ: 137 269 152.

63. *Решение.* Нет, нельзя, поскольку число тарелок, лежащих вниз дном, после каждого переворачивания нечетно.

64. *Ответ:* увеличилась на 25%.

65. *Решение.* Если один лист бумаги разорвать еще на 4 части, то число частей бумаги увеличится на 3. Значит, после любого числа делений количество частей бумаги при делении на 3 должно давать в остатке 3. Поскольку $2013 = 3 \cdot 671$, то ученик ошибся в подсчете.

66. *Ответ:* 30°.

67. *Указание.* $\dfrac{5}{3}x = 24 - x$, откуда $x = 9$, т. е. сейчас 9 ч.

68. *Ответ:* на 5, 8, 9, 10 и 11 частей.

69. *Ответ:* 41.

70. *Решение.* Нельзя, поскольку при любой расстановке знаков «+» и «−» два первых числа дают нечетную сумму, три первых числа дают четную сумму и т. д., а всего 0 чисел дают нечетную сумму, т. е. не может быть равна 30.

71. *Ответ:* 126 и 621.

72. *Решение.* Согласно условию имеем равенство

$a_1 - a_2 = a_3 - a_1$, или $2a_1 = a_2 + a_3$, откуда

$a_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_3)$.

73. *Решение.* $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 91a + 10(a + b)$. Поскольку 91 и $a + b$ делятся на 13, то и число $\overline{aba}$ делится на 13, что и требовалось доказать.

74. *Ответ:* 190 и 19.

75. *Ответ:* на 1.

76. *Решение.* В приведенной сумме каждое слагаемое представляет собой произведение двух последовательных натуральных чисел, одно из которых четное, значит, каждое слагаемое тоже четное, следовательно, и вся сумма — четная, т. е. Вася ошибся.

77. *Решение.* В 20 кг морской воды содержится $20 \cdot 0{,}05 = 1$ кг соли. Прибавим к 20 кг морской воды x кг пресной, в которой содержится 2 кг соли. Согласно условию имеем уравнение

$\frac{2}{20+x} = \frac{2}{100}$, откуда $x = 80$.

Ответ: 80 кг.

78. *Указание.* $36 : (7 - 1) = 6$ с.

79. *Ответ:* 444.

80. *Ответ:* 2 кг.

81. *Ответ:* 43,5 и 56,5 см.

82. *Решение.* Сложить ленту вдвое, затем еще раз вдвое и отрезать получившуюся четвертую часть. Тогда останется

$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (м).

83. *Решение.* Если девочек в этой секции x, то мальчиков будет $16x$, и всего $x + 16x = 17x$. Так как $17x < 30$, то $x = 1$; $16x = 16$. Значит, мальчиков 16, девочек — 1, а 17 человек невозможно разбить на пары.

Ответ: нет.

84. *Решение.* Заметим, что $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$. Чтобы из этой суммы получилось число 40, необходимо некоторые знаки «+» заменить на «−». Но при замене одного плюса на минус сумма уменьшается на удвоенное число, перед которым поменяется знак, а именно, на четное число. Поскольку разность между нечетным числом 45 и четным числом есть число четное, то получить четное число 40 невозможно.

Ответ: нельзя.

85. *Ответ:* 6.

86. *Ответ:* нет.

Указание. Учесть, что все простые числа (кроме двойки) — нечетные числа.

87. *Решение.* Из трех чисел, по крайней мере, два являются одинаковой четности (оба четные, или оба нечетные). Тогда их сумма делится на 2.

88. *Ответ:* 13 500.

89. *Ответ:* цифрой 1.

90. *Ответ:* 745.

91. *Решение.* Пусть x — наименьшее из последовательных целых чисел. Тогда получим уравнение

$x + (x + 1) + (x + 2) = (x + 3) + (x + 4) +$
$+ (x + 5) + (x + 6) + (x + 7)$,
откуда находим $x = -11$, и т. д.
Ответ: $-11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4$.

92. *Решение.* 15% = 0,15; 20% = 0,2. Новая зарплата равна $1{,}15 \cdot 1{,}2 = 1{,}38$ от прежней. Увеличение зарплаты составит: $(1{,}38 - 1) \cdot 100\% = 38\%$.
Ответ: на 38%.

93. *Решение.* Имеем уравнение $9 + n \cdot 999 = 9999$, или $999n = 9990$, откуда $n = 10$.
Ответ: 10 раз.

94. *Ответ:* 36 чисел.

95. *Решение.* Существует 12 разных остатков при делении на 12. Среди 13 чисел всегда найдутся два с одинаковыми остатками. Значит, их разность разделится на 12.

96. *Ответ:* 7 крольчат и 8 гусят.

97. *Указание.* Например: 1, 3, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 3.

98. *Ответ:* 17; 28; 39.

99. *Решение.* Пусть 1 тетрадь стоит x руб., тогда получим уравнение
$15x + 7 = 20x - 8$, откуда $x = 3$.
Значит, 1 тетрадь стоит 3 руб., а у Сергея было $15x + 7 = 52$ (руб.).
Ответ: 52 рубля.

100. *Решение.* Пусть S — искомая сумма. Напишем ее дважды:
$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97 + 99$,
$S = 99 + 97 + 95 + \ldots + 5 + 3 + 1$.
Складывая обе части равенств, получим
$2S = (1 + 99) + (3 + 97) + \ldots + (99 + 1)$, или
$2S = 100 \cdot 50$ (таких пар 50).
Значит, $S = 2500$.
Ответ: 2500.

101. *Ответ:* 21; 42; 63; 84.

102. *Указание.* Учесть, что $101 \cdot 111\,111 =$
$= 101 \cdot 111 \cdot 1001$ и $101\,101 \cdot 111 =$
$= 101 \cdot 1001 \cdot 111$.
Так что значение выражения равно 0.

103. *Ответ:* $x = 2$ или $x = 4$.

104. *Ответ:* 71 371 371.

105. *Решение.* Пусть внуку x лет, а бабушке — y лет. Так как 1 год = 12 мес., то $12x = y$. Кроме того, им вместе 78 лет, тогда $x + y = 78$, или

$x + 12x = 78$, откуда $x = 6$. Значит, внуку 6 лет, а бабушке будет $78 - 6 = 72$ года.

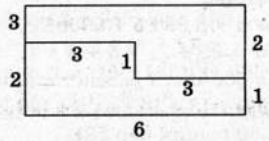
Ответ: внуку 6 лет, бабушке 72 года.

106. *Ответ:* $x = 6 - 7n$.

107. *Решение.* Так как $9 = 8 + 1$, то 9^{100} дает при делении на 8 такой же остаток как 1^{100} при делении на 8. Значит, искомый остаток 1.

Ответ: 1.

108. *Решение.* Можно (см. рис.).



109. *Ответ:* $x = 35$.

110. *Ответ:* 6. *Указание.* Искомая цифра будет последней и в числе $1 \cdot 2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 5^2$.

111. *Решение.*

Верные ответы	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
Очки	390	367	344	321	298	275	252	229	206	183	160

Как видно из таблицы, участник викторины правильно ответил на 20 вопросов.

Замечание. Количество набранных очков уменьшается на $13 + 10 = 23$.

112. *Ответ:* 7 яблок.

113. *Ответ:* 8 прямоугольников.

114. *Решение.* Периметр $P = 2(a + b)$, где a — длина, b — ширина прямоугольника. Так как $65\% = 0{,}65$, то получим $a - 0{,}65a = 7$, откуда $a = 20$, $b = 0{,}65a = 20 \cdot 0{,}65 = 13$.

Значит, $P = (20 + 13) \cdot 2 = 66$ м.

Ответ: 66 м.

115. *Ответ:* 100 раз.

Указание. $99 + n \cdot 999 = 99\,999$, откуда находим $n = 100$.

116. *Ответ:* 66 999 и 70 000.

117. *Ответ:* 30°; 60°; 90°.

118. *Ответ:* 15 крольчат и 8 гусят.

119. *Решение.* Нет, так как иначе корзины с четным и нечетным количеством арбузов должны чередоваться, т. е. корзин должно быть четное число.

Ответ: нет.

120. *Ответ:* 17 и 34. *Указание.* $x + y = 51$; $0{,}3x = 0{,}6y$, тогда $x = 2y$ и $2y + y = 51$, $y = 17$; $x = 34$.

121. *Ответ:* 50 руб.

122. *Ответ:* 3 651 027.

123. *Ответ:* 5 т.

Указание. $100\% - 30\% = 70\% = 0{,}7$; $2x \cdot 0{,}7 = 7$, откуда $x = 5$.

124. *Решение.* $101\,101 \cdot 555 - 101 \cdot 555\,555 = 1001 \cdot 101 \cdot 555 - 101 \cdot 1001 \cdot 555 = 0$.

Ответ: 0.

125. *Ответ:* 17.

126. *Решение.* 1% = 0,01.

1) 100 т · 0,01 = 1 т — количество воды в добытом угле.

2) 100 т — 1 т = 99 т — чистого угля.

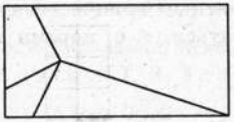
99 т — 100%

x т — 110%, откуда $x = 99 \cdot 110 : 100 = 108{,}9$ т.

3) 108,9 − 100 = 8,9 т — увеличится масса добытого угля.

Ответ: на 8,9 т.

127. *Решение.* Да, возможный вариант изображен на рисунке.



128. *Ответ:* нет. *Указание.* Данное число кратно 28.

129. *Решение.* Пусть x ч — оставшаяся часть суток, тогда истекшая часть будет $(24 - x)$ ч, что по условию равно 25% = $0{,}25x$ ч. Имеем уравнение $24 - x = 0{,}25x$, откуда $x = 19{,}2$ (ч) = 19 ч 12 мин. Значит, теперь 24 ч − 19 ч 12 мин = 4 ч 48 мин.

Ответ: 4 ч 48 мин.

130. *Решение.* По условию задачи 1 ручка и 1 альбом стоят 32 рубля, тогда 2 ручки и 2 альбома будут стоить 64 рубля. Значит, 3 ручки стоят 100 − 64 = 36 рублей, а 1 ручка стоит 36 : 3 = 12 рублей. Тогда 1 альбом будет стоить 32 − 12 = 20 рублей.

Ответ: 12 и 20 руб.

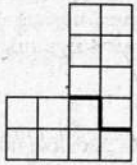
131. *Ответ:* 397.

132. *Указание.* $\dfrac{3000 \cdot 0{,}650 + 2000 \cdot 0{,}720}{3000 + 2000} = \dfrac{3390}{5000} = 0{,}678$.

Значит, получился сплав 678 пробы.

133. *Ответ:* в 1001 раз.

134. *Решение.*



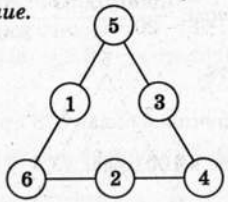
135. *Решение.* Учесть, что квадрат также является прямоугольником, тогда с площадью по 1 см² будет 8 прямоугольников; по 2 см² — 10; по 3 см² — 4; по 4 см² — 5 и 8 см² — 1. Всего будет: 8 + 10 + 4 + 5 + 1 = 28 прямоугольников.

136. *Указание.* $\overline{ABCABC}$ — шестизначное число, $\overline{ABC}$ — трехзначное число, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры.

137. *Ответ:* на 5.

138. *Ответ:* дать шестерым детям по 1 яблоку, а седьмому — оставшееся яблоко вместе с пакетом.

139. *Решение.*

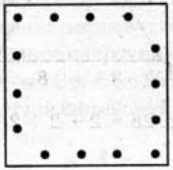


140. *Решение.* 4 курицы за 16 дней снесут в 4 раза больше яиц, чем за 4 дня, а 16 кур — в 4 раза больше, чем 4 курицы. Всего получим:

$4 \cdot 16 = 64$ яйца.

Ответ: 64 яйца.

141. *Решение.* На рисунке показано расположение стульев, удовлетворяющее условию задачи.



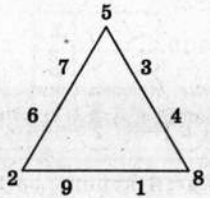
142. *Решение.*

5	0	7
6	4	2
1	8	3

143. *Ответ:* 33; 65; 129.

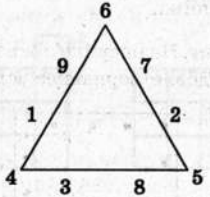
144. *Решение.*

$5 + 7 + 6 + 2 = 5 + 3 + 4 + 8 =$
$= 2 + 9 + 1 + 8 = 20.$



$6 + 9 + 1 + 4 = 6 + 7 + 2 + 5 = 4 + 3 + 8 + 5 = 20.$

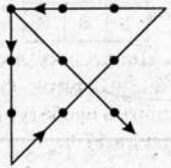
Возможны и другие решения.



145. *Решение.* $28 = 2 + 2 + 2 + 22.$

146. *Ответ:* 2. *Указание.* Применить признаки делимости на 4 и 9.

147. *Решение.*



148. *Ответ:* 3.

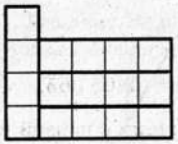
149. *Ответ:* 10.

150. *Указание.* Искомые числа должны оканчиваться цифрой 0, т. е. $n = 7$; 17 и 27 удовлетворяют условию.

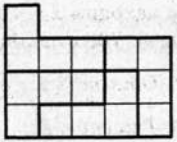
151. *Решение.* $10 \cdot 9 = 90$ (руб.), так как надо сделать 9 распилов.

Ответ: 90 рублей.

152. *Решение.*



I способ



II способ

153. *Решение.* Заметим, что при разрезании каждого листа на 4 части число листов увеличивается на 3. Значит, добавится $28 - 10 = 18$ (листов), тогда разрезали $18 : 3 = 6$ (листов).

Ответ: 6 листов.

154. *Решение.* Поскольку в сутках 24 ч, то $125 \text{ ч} = 5 \cdot 24 \text{ ч} + 5 \text{ ч} = 5$ суток $+ 5$ ч. Значит, пароход вернется в порт в субботу, в 17 ч.

Ответ: в субботу, в 17 ч.

155. *Решение.*

3	10	5
8	6	4
7	2	9

156. *Решение.* Однозначных чисел использовано 9, двузначных потребуется $90 \cdot 2$ цифр.

Пусть в книге x страниц, тогда страниц с тремя цифрами будет $x - (90 + 9) = x - 99$, а цифр на них $3(x - 99)$.

Имеем уравнение $9 + 90 \cdot 2 + 3 \cdot (x - 99) = 2016$, откуда находим $x = 708$.

Ответ: 708 страниц.

157. *Ответ:* $237 \cdot 31\,245 = 7\,405\,065$.

158. *Решение.* Для нумерации с первой по девятую квартиру понадобится 9 металлических цифр; с 10-й по 99-ю — $(99 - 9) \cdot 2 = 180$ цифр;

с 100-й по 113-ю потребуется $(113 - 99) \cdot 3 = 42$ цифры, а всего

$9 + 180 + 42 = 231$ цифра.

Ответ: 231.

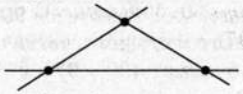
159. *Решение.* Поскольку средний возраст всей команды равен 24 годам, то сумма возрастов всех игроков равна $11 \cdot 24 = 264$, а после удаления одного из игроков средний возраст не изменится, тогда сумма 10 игроков будет $10 \cdot 24 = 240$. Значит, удаленному игроку было $264 - 240 = 24$ (года).

Ответ: 24.

160. *Ответ:* 105 прыжков.

161. *Решение.* $8947 + 8947 = 17\,894$.

162. *Указание.* Возможный вариант показан на рисунке.



163. *Ответ:* $\frac{5}{8}$.

164. *Ответ:* 39 см.

165. *Решение.*

1) $720 + 80 = 800$ (г) — получено смеси;

2) $80 : 800 = 0{,}1 = 10°$ — концентрация смеси.

166. *Ответ:* $8126 + 8126 = 16\,252$.

167. *Ответ:* можно.

Указание. $130 \cdot 12 + 160 \cdot 9 = 3000$ кг $= 3$ т.

168. *Решение.* Два скачка собаки составляют 4 м; 3 скачка лисицы составляют 3 м. Следовательно, когда собака пробегает 4 м, расстояние между ними сокращается на 1 м. Первоначальное же расстояние между ними в 30 раз больше. Значит, собака догонит лисицу, когда пробежит $4 \cdot 30 = 120$ м.

Ответ: на расстоянии 120 м.

169. *Решение.* При делении на n любое число дает в остатке одно из чисел $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, т. е. существует всего n различных остатков. Поэтому среди $n + 1$ чисел найдутся два, дающих одинаковые остатки при делении на n. Разность этих чисел делится на n.

170. *Ответ:* 50. *Указание.* Сгруппировать по парам $(99 - 97) + (95 - 93) + \ldots + (7 - 5) + (3 - 1)$, и т. д.

171. *Решение.* Пусть первая часть числа x, тогда вторая часть равна $(15\,000 - x)$. Согласно условию имеем уравнение

$0{,}05x + 0{,}07 \cdot (15\,000 - x) = 0{,}065 \cdot 15\,000$,

откуда находим $x = 3750$ — I часть, тогда

$15\,000 - 3750 = 11\,250$ — II часть.

Ответ: 3750 и 11 250.

172. *Решение.* Пусть A — данное нечетное число. Тогда имеем $15A = \left(A + \frac{A-1}{2}\right) \cdot 10 + 5$.

173. *Ответ:* нельзя.

174. *Указание.* Достаточно установить последнюю цифру каждой степени, а затем сложить:
... 3^6 — оканчивается на 9; ... 4^6 — на 6; ... 5^6 — на 5, тогда $9 + 6 + 5 = 20$, т. е. данная сумма оканчивается нулем.

175. *Ответ:* на 23,5%.

176. *Ответ:* 5050 — нечетное число.
Указание. $(1 + 100) + (2 + 99) + \ldots = 101 \cdot 50$.

177. *Ответ:* $18\,969 + 18\,969 = 37\,938$.

178. *Ответ:* 1 кг.

179. *Ответ:* 10^6 см = 10 км.

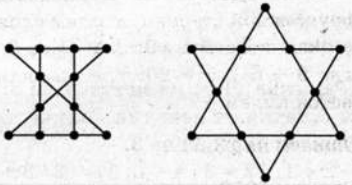
180. *Решение.* $20 = 1 + 3 + 5 + 7 + \frac{75}{75} + \frac{33}{11}$.

181. *Решение.* Допустим, что каждый ученик знает не более 6 стихотворений, тогда 26 учеников знают не более $6 \cdot 26 = 156$ стихотворений. Но по условию задачи они знают всего 157 стихотворений. Противоречие. А это означает, что найдется ученик, знающий хотя бы 7 стихотворений.

182. *Ответ:* через 6 дней.

183. *Решение.*

I способ II способ

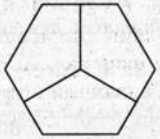


184. *Решение.* Наибольшее трехзначное число, кратное 6, будет 996, тогда искомое число на 5 больше, т. е. $996 + 5 = 1001$.
Ответ: 1001.

185. *Указание.* Произведение двух натуральных чисел, сумма которых меньше 17, будет наибольшим, если каждое из них равно 8.

186. *Ответ:* в 2 раза.

187. *Решение.*



188. *Ответ:* 5.

189. *Решение.* Пусть a — цифра сотен, b — цифра десятков, c — цифра единиц трехзначного числа $\overline{abc}$. Тогда разность между трехзначным числом и суммой его цифр запишется в виде

$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b)$, т. е. делится на 9, что и требовалось доказать.

190. *Ответ:* 21.

Указание. $1 + 2 + 3 + \ldots + 6 = 21$.

191. *Решение.* Нет, не могут. Для этого рассмотрим остатки от деления количества хамелеонов каждой окраски на 3.

$7 = 3 \cdot 2 + 1$; $12 = 3 \cdot 4 + 0$; $11 = 3 \cdot 3 + 2$.

Значит, в начальный момент упорядоченная тройка остатков имеет вид (1; 0; 2).

После I встречи двух хамелеонов разной окраски (не важно какой) тройка остатков имеет вид (0; 2; 1); после II встречи — (2; 1; 0), после III — (1; 0; 2), и т. д. Как видим, комбинация (0; 0; 0) (36 хамелеонов одного цвета) не может встретиться.

192. *Решение.* $\overline{abab} - \overline{baba} =$

$= (1000 + 10 - 100 - 1)a + (100 + 1 - 1000 - 10)b =$

$= 909(a - b) = 9 \cdot 101(a - b)$, т. е. делится на 9 и на 101, что и требовалось доказать.

193. *Решение.* За 1 минуту Сергей проходит $\frac{1}{20}$ часть пути, а Николай — $\frac{1}{30}$. За 6 минут Николай прошел $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$, тогда $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$, значит, $\frac{1}{5} : \frac{1}{60} = 12$ (минут).

Ответ: через 12 минут.

194. *Ответ:* на 25%.

195. *Ответ:* 10.

196. *Ответ:* $\frac{9}{10}; \frac{10}{11}; \frac{11}{12}; \frac{12}{13}$.

Указание. Найти дополнение каждой дроби до 1 и сравнить их.

197. *Ответ:* 25.

198. *Ответ:* на 8 м.

199. *Решение.* Поскольку девочка ходит в детсад, то Грише не 4 года. Так как Валя старше Гриши, то Вале 14 или 15 лет. Но сумма лет Вали и Анны делится на 3, значит Вале 14 лет, тогда Анне 4 года. Так как Валя старше Гриши, то Грише 8 лет, а Ольге — 15 лет.

Ответ: Анне 4 года, Грише 8 лет, Вале 14 лет, Ольге 15 лет.

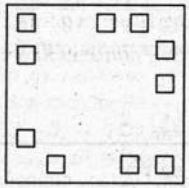
200. *Указание.* Нет, нельзя. Так как очевидно, что при $n = 17$ (и даже при $n = 16$) получим составное число: $172 + 17 + 17 = 17 \cdot 19$.

201. *Ответ:* воскресенье. *Указание.* Последний день четверга был 30-го числа.

202. *Решение.* При делении на 100 может получиться в остатке только одно из следующих чисел: 0, 1, 2, 3, ..., 99. Поэтому среди 101 числа найдутся два, которые при делении на 100 дают

равные остатки. Следовательно, их разность делится на 100.

203. *Ответ:*



204. *Решение.* Когда лист бумаги разрывается на 3 части, то число листков увеличится на 2. Так как первоначально их было 3, то всегда будем иметь нечетное число листков, а 100 — число четное, т. е. подсчет был произведен неправильно.

205. *Ответ:* при $n > 6$.

206. *Ответ:* 14 и 28.

207. *Решение.* Пусть r_1 — остаток от деления n^2 на 19, а r_2 — остаток от деления 2^n на 19. Заметим, что число $n^2 + 2^n$ будет делиться на 19 тогда, когда сумма остатков будет равна 19. Составим таблицу:

n	1	2	3	4	5
r_1	1	4	9	16	6
r_2	2	4	8	16	13
$r_1 + r_2$	3	8	17	32	19

Как видно из таблицы, $r_1 + r_2 = 19$ при $n = 5$.

Ответ: при $n = 5$.

208. *Ответ:* 100.

209. *Указание.* Понедельник. Установить, что суббота может быть только 2, 9, 16, 23 и 30 числа месяца.

210. *Ответ:* на $1\frac{2}{3}$.

211. *Указание.* Одним способом. Решение задачи сводится к решению в целых числах уравнения $7x + 12y = 100$.

212. *Ответ:* 2^{22}.

213. *Указание.* 3 и 6 или 4 и 4. Показать, что если прямоугольник разбить на квадраты со стороной, длина которой равна 1, то должно быть ровно 4 квадрата, не имеющих общих точек со сторонами прямоугольника.

Замечание. Задачу можно решить иначе:

если x — длина, y — ширина прямоугольника, то $2(x + y) = xy$, откуда

$$x = \frac{2y}{y-2}, \text{ или } x = 2 + \frac{4}{y-2}.$$

Так как $x, y \in N$, то находим $x = 3$; $y = 6$ или $x = y = 4$.

214. *Ответ:* 2,5 и 7,5.

215. *Решение.* Искомое число имеет вид $\overline{7xy} = 700 + 10x + y$, где $x \neq y$.

Так как $\overline{7xy}$ кратно 3, то $7 + x + y = 3k$.

Но $0 \le x + y \le 18$, или $0 \le 3k - 7 \le 18$; $7 \le 3k \le 25$, $2\frac{1}{3} \le k \le 8\frac{1}{3}$, откуда $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

При $k = 8$ $x + y = 17$, тогда $x = 9$, $y = 8$ и 798 — искомое число.

Ответ: 798.

216. *Ответ:* 59.

217. *Указание.* Задача не имеет смысла — ведь 8 рабочих не могут копать отверстие диаметром 1 м.

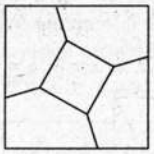
218. *Указание.* $(20 \cdot 100) : 80 = 25$ (%).

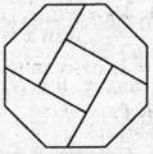
219. *Решение.* $4 + 8 + 1 = 13$ (пар);
$13 \cdot 2 = 26$ (участников).

Ответ: 26.

220. *Ответ:* цифру 0 — 11 раз, цифру 1 — 21 раз, а остальные цифры — по 20 раз.

221. *Решение.*





222. *Указание.* Разложить 315 на множители.

223. *Ответ:* 6.

224. *Указание.* Разложить 360 на множители.

225. *Ответ:* 85.

226. *Ответ:* на 45.

227. *Ответ:* 1; 2 и 3.

228. *Ответ:* сестре 12 лет, брату 21 год.

229. *Решение.* Если x — ребро куба, то его объем x^3. При увеличении каждого ребра на 10% его длина станет $x + 0{,}1x = 1{,}1x$, а объем станет $(1{,}1x)^3 = 1{,}331x^3$. Значит, объем куба увеличится на $1{,}331 \cdot 100 - 100 = 33{,}1$ (%).

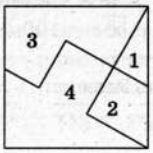
Ответ: на 33,1%.

230. *Решение.* За 1 день каменщик выполнит $\frac{1}{3}$ часть всей работы, а за 2 дня он выполнит $\frac{2}{3}$ всей части. Ученику на 2 дня остается $\frac{1}{3}$ часть. На всю работу ученику потребуется 6 дней.

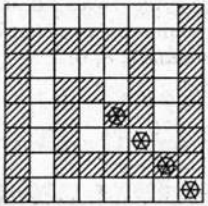
Ответ: за 6 дней.

231. *Указание.* $|x - 3| \ne 0$, $3 - \frac{3}{|x-3|} \ne 0$, т. е. $|x - 3| \ne 1$, откуда находим $x \ne 2$; $x \ne 3$; $x \ne 4$.

232. *Решение.*



233. *Решение.*



234. *Ответ:*

17	7	9
3	11	19
13	15	5

235. *Решение.* Поднимаясь на 2 м по стволу, белка совершает путь длиной 2,5 м. Значит, взобравшись на дерево высотой 8 м, она пройдет путь длиной 10 м.

236. *Решение.* Нет. В каждом рукопожатии используют две руки, значит, общее число рук должно быть четным, но у 17 марсиан $3 \cdot 17 = 51$ рук — число нечетное.

237. *Решение.* Всякое трехзначное число можно записать в виде $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где a — цифра сотен, b — десятков, c — единиц. Согласно условию задачи имеем:

$\overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx} =$

$= 222\,(x + y + z) = 5328$, откуда $x + y + z = 24$.

Заметим, что существует единственная тройка различных однозначных чисел, сумма которых равна 24. Это числа 7, 8, 9.

Ответ: 7, 8, 9.

238. *Ответ:* 270 руб.

239. *Ответ:* 31.

Указание. Если плитка состоит из $x \cdot y$ единичных долек, то всего разломов будет $xy - 1$.

240. *Ответ:* 5 руб., 9 руб., 10 руб.

241. *Ответ:* 350 руб.

242. *Решение.* Поскольку из трех чисел как минимум два одинаковой четности, то их сумма будет делиться на 2.

243. *Ответ:* 7 см². *Указание.* Из площади $ABCD$ вычесть площади незакрашенных треугольников AEB, DEF, BCF.

244. *Ответ:* 10%.

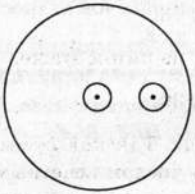
245. *Решение.* Наименьшее число бананов, которое можно раздать десяти обезьянам так, чтобы любые две получили различное число бананов, равно: $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. Значит, 42 банана раздать десяти обезьянам так, чтобы любые две получили различное число бананов, невозможно.

Ответ: нельзя.

246. *Решение.* Поскольку сумма данных чисел равна 140, то сумма чисел в каждой группе равна 70. Имеем: 1 + 13 + 25 + 31 = 2 + 7 + 18 + 43.

247. *Решение.* По условию задачи содержимое каждой из коробок не соответствует надписи на ней. Следовательно, в коробке с надписью «карамель или халва» содержится печенье, значит, в коробке с надписью «карамель» — халва, а в коробке с надписью «печенье» — карамель.

248. *Решение* (см. рис.). Достаточно вырезать маленький кружок с центром в отмеченной точке и такой же кружок с центром в центре данного круга, а затем поменять эти кружки местами.



249. *Ответ:* 136 и 245; 145 и 236: 135 и 246; 146 и 235.

250. *Ответ:* 654 321.

251. *Решение. I взвешивание:* на одной чашке 2 кг 300 г конфет, а на другой — 2 кг 200 г и гиря 100 г.

II взвешивание: на одной чашке 1 кг 200 г конфет, а на другой — 1 кг 100 г и гиря 100 г.

III взвешивание: из конфет массой 1 кг 100 г отвесить 100 г конфет с помощью гири 100 г.

252. *Ответ:* 10 м.

253. *Ответ:* 32 см.

254. *Решение.*

1) $20 \times 20 = 400$ (см^2) — площадь одного платка.

2) 2 м$^2 = 2 \cdot (1$ м $\times 1$ м$) = 2 \cdot (100$ см $\times 100$ см$) =$ $= 20\,000$ см^2.

3) $20\,000 : 400 = 50$ (платков).

4) $50 : 10 = 5$ (платков).

Ответ: 5 платков в день.

255. *Ответ:* 13.

256. *Ответ:* на пятом этаже.

257. *Ответ:* 30.

258. *Решение.* Так как сумма 13 нечетных чисел является числом нечетным, а 50 — число четное, то разменять 50 рублей на 13 монет по 1 и 5 рублей нельзя.

Ответ: нельзя.

259. *Ответ:* отцу 60 лет, сыну – 30 лет.

260. *Решение.* За 1 день лев съел $\frac{1}{2}$ оленя, волк $\frac{1}{3}$ оленя, собака $\frac{1}{6}$ оленя, а вместе за 1 день съедят $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$, т. е. 1 оленя.

261. *Решение.* Пусть все ребята собрали разное число орехов: 1; 2; 3; ...; 17. Так как сумма числа орехов $(1+17):2\cdot 17=153>150$, то какие-то двое ребят собрали одинаковое число орехов.

262. *Решение.* При каждом своем ходе конь меняет цвет поля, следовательно, при возвращении обратно он должен сделать четное число ходов.

263. *Решение.* Поскольку сумма 2015 чисел — число нечетное, то число нечетных слагаемых — нечетно. Тогда среди 2015 чисел есть по крайней мере одно четное число. Следовательно, произведение 2015 чисел будет четным числом.

264. *Решение.* $100-12=88$ (чел.) — знали английский или французский языки;

$88-73=15$ (чел.) — не знали английского языка;

$88-80=8$ (чел.) — не знали французского языка;

$88-(15+8)=65$ (чел.) — знали и французский и английский языки.

Ответ: 65.

265. *Ответ:* 45 рублей.

266. *Решение.* Составим таблицу подсчета очков.

Решено задач	5	4	3	2	1	0
Не решено	0	1	2	3	4	5
Очки	30	22	14	6	−2	−10

Ответ: 4 задачи, 2 задачи.

267. *Ответ:* 15 учеников.

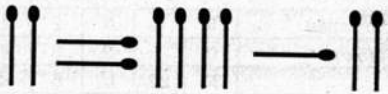
268. *Ответ:* 30 см². *Указание.* Пусть x — ширина, $(x+7)$ — длина, тогда $x+(x+7)=13$, и т. д.

269. *Решение.* Очевидно О — четное число. Но $2\cdot О$ больше чем 10 и поэтому О = 6, или О = 8. Если О = 8, то Н = 4 и $2\cdot О<15$ (а должно быть $2\cdot О=16$). Значит, О = 6, Н = 3, М = 1, $Д>5$ и $2Д=16$, т. е. Д = 8. Ясно, что $2И=Г$ и, значит, $И\le 4$. Но $И\ne 1$, так как М = 1; $И\ne 3$, ибо Н = 3; $И\ne 4$, иначе Г = Д = 8; $И\ne О$, иначе Г = О. Следовательно, И = 2, Г = 4, тогда получим расшифровку ребуса:

$$\begin{array}{r} 6823 \\ +\,6823 \\ \hline 13646 \end{array}$$

270. *Решение.* В одном месяце может быть пять воскресений при условии, если первое воскресенье придется в 29-дневном месяце 1-го числа, в 30-дневном 1-го или 2-го числа, в 31-дневном 1; 2 или 3-го числа.

271. *Решение.*



272. *Ответ:*

4396 : 157 = 28

273. *Решение.* 10 карандашей, так как если взять 9 карандашей, то может оказаться, что все они зеленые.

274. *Решение.* Это число 1999, так как у всех чисел, меньших этого числа, сумма цифр не больше 27, а у числа 999 сумма цифр равна 27.

275. *Ответ:* 64 прабабушки и прадедушки.

276. *Ответ:* (см. табл).

	3	5		3	5
0	0	0	5	1	0
1	3	0	6	0	1
2	0	3	7	3	1
3	3	3	8	0	4
4	1	5			

277. *Решение.* Пускаем одновременно песочные часы на 3 и 7 мин. Как только песок пересыплется в 3-минутных часах, опускаем яйцо в кипящую воду. Из 7-минутных часов песок будет сыпаться еще 4 мин, сколько и требуется.

278. *Ответ:* разрезать по диагонали.

279. *Ответ:* 190 и 19.

280. *Решение.* 8 учеников за 3 ч выкопают 12 ям, тогда за 1 ч они выкопают 4 ямы, а за 5 ч выкопают $4 \cdot 5 = 20$ ям.

Ответ: 20 ям.

281. *Ответ:* 21; 42; 63; 84.

282. *Ответ:* 8 прямоугольников.

283. *Ответ:* внуку 6 лет, деду 72 года.

284. *Ответ:* например: 7; −8; 7; −8; 7 и т. д.

285. *Решение.* Хозяйка заполнила 5-литровую посуду. Из нее она перелила 3 л в 3-литровую посуду и затем эти 3 л она вылила в раковину. Оставшиеся в 5-литровом сосуде 2 л воды она вылила в 3-литровый сосуд. Затем она снова заполнила 5-литровый сосуд водой и из него перелила 1 л в 3-литровую посудину. В большой посудине осталось ровно 4 л.

286. *Решение.* 14 карандашей дороже, так как из условия следует, что карандаш дороже тетради.

Ответ: 14 карандашей.

287. *Ответ:* в 6 раз.

288. *Ответ:* Григорий — 2 пирожных, Сергей — 5 пирожных, а Коля — 6 пирожных.

289. *Ответ:* 7.

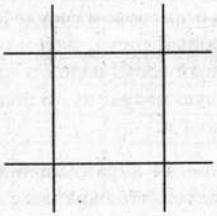
290. *Решение.* Если 3 кошки поймали 3 мышек за 3 минуты, то за 6 минут они поймают в 2 раза больше мышек.

Ответ: 3 кошки.

291. *Ответ:* 4 раза.

292. *Ответ:* см. рисунки.

293. *Ответ:* см. рисунок.



294. *Решение.*

а) $(13 \cdot 9 + 6) : 3 - 2 = 37$;

б) $(13 \cdot 9 + 6) \cdot (3 - 2) = 123$.

295. *Решение.*

$101 \cdot 999\,999 - 101\,101 \cdot 999 =$

$= 101 \cdot 999 \cdot 1001 - 101 \cdot 1001 \cdot 999 = 0.$

Ответ: 0.

296. *Решение.* Да, возможно. Пусть Сергей родился 31 декабря, тогда позавчера (30 декабря прошлого года) ему 9 лет, а 1 января (сегодня) уже будет 10 лет, 31 декабря этого года — 11 лет, а в следующем году — 12 лет.

Ответ: может.

297. *Ответ:* на 5.

298. *Ответ:* 9 см.

Указание. $((35 + 21) - 38) : 2 = 9$ (см).

299. *Ответ:* 7 детей.

Указание. Пусть в секции x детей, тогда получим уравнение $13x = 19 + 12(x - 1)$.

300. *Ответ:* $34\,316 + 75\,281 + 9 = 109\,606$.

6 класс

1. *Решение.* Найдем дополнения каждой дроби до 1 и сравним их:

$1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}; 1-\frac{6}{7}=\frac{1}{7}; 1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}; 1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}.$

Поскольку $\frac{1}{6}>\frac{1}{7}>\frac{1}{8}>\frac{1}{9}$, то $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}<\frac{7}{8}<\frac{8}{9}$.

Ответ: $\frac{8}{9}, \frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}$.

2. *Указание.* $\frac{7\cdot7}{7\cdot7}\cdot 1\,111\,111^2 -$

$-\frac{5\cdot5}{5\cdot5}\cdot 1\,111\,111^2=0.$

3. *Решение.* $1-\frac{2013}{2014}=\frac{1}{2014};$

$1-\frac{2014}{2015}=\frac{1}{2015}.$

Но $\frac{1}{2014}>\frac{1}{2015}$, значит, $\frac{2014}{2015}>\frac{2013}{2014}$.

4. *Решение.* 32 − 7 = 25 (учеников) — посещают кружки;

25 − 18 = 7 (учеников) — посещают лишь химический кружок;

13 − 7 = 6 (учеников) — посещают оба кружка.

Ответ: 6 химиков.

5. *Решение.* Если все слагаемые — нечетные числа, то их общая сумма будет четной. Согласно условию она нечетная. Значит, среди этих чисел есть и четное, тогда произведение — четное число.

Ответ: четным.

6. *Ответ:* правильной.

7. *Ответ:* 77 : 7 + 7 = 18.

8. *Решение.* Пусть левая часть равенства равна A, тогда $A=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+ab+abc}+$

$+\frac{1}{ab+abc+ab\cdot ca}=\frac{1}{1+a+ab}+\frac{a}{a+ab+1}+$

$+\frac{ab}{ab+1+a}=\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=1.$

9. *Решение.* Искомое число должно быть кратным 3 и 5, т. е. кратным 15, которое и будет наименьшим.

Ответ: 15.

10. *Решение.* $\frac{17}{39}=\frac{34}{78}; 1=\frac{78}{78}$. Пусть x — числитель искомой дроби, тогда $\frac{34}{78}<\frac{x}{26}<\frac{78}{78}$, т. е. $\frac{77}{78}$ — искомое число.

11. *Решение.* Разделим числитель и знаменатель на 2. Тогда знаменатель примет вид:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot2016}.$

Но $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{2015 \cdot 2016} = \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$, значит, знаменатель равен $1 - \frac{1}{2016}$, а значение выражения равно 2016.

Ответ: 2016.

12. *Ответ:* $\frac{17}{13}$. Общий вид $\frac{17+17n}{13+13n}$, где $n \in N$.

13. *Ответ:* 5.

14. *Ответ:* на 44%.

15. *Ответ:* 15.

16. *Ответ:* 35 977 + 35 977 = 71 954.

17. *Решение.* Заметим, что 3 пятницы, выпадающие на четные числа месяца, могут быть только 2; 16 и 30. Следовательно, 4-го числа было воскресенье.

Ответ: воскресенье.

18. *Ответ:* НОК = $35b$, НОД = b.

19. *Ответ:* $\frac{5}{7}$.

20. *Ответ:* 15 732 и 15 768. *Указание.* Применить признаки делимости на 9 и 4.

21. *Решение.* Согласно условию $\overline{ab} - (a + b) = \overline{ba}$, или $10a + b - a - b = 10b + a$, откуда $4a = 5b$.

Полученное равенство выполняется при $a = 5$, $b = 4$, так как искомое число 54.

Ответ: 54.

22. *Ответ:* $1354 \cdot 4 = 5416$.

23. *Ответ:* 13 кроликов и 7 фазанов.

24. *Ответ:* 5.

25. *Решение.* Пусть первое из шести слагаемых равно x, второе равно y, тогда третье, четвертое, пятое и шестое слагаемые будут равны соответственно $x + y$, $x + 2y$, $2x + 3y$, $3x + 5y$.

Сумма всех шести чисел равна $(x + y) + (x + y) + (x + 2y) + (2x + 3y) + (3x + 5y) = \ldots = 4(2x + 3y)$, т. е. равна учетверенному пятому слагаемому. Значит, если известна сумма шести чисел, то, разделив ее на 4, получим пятое число.

26. *Указание.* Сообразите, как набрать в девятилитровый сосуд 8 л воды.

27. *Ответ:* 5000 рублей.

28. *Ответ:* 7.

29. *Ответ:* на $33\frac{1}{3}$%.

30. *Ответ:* нет.

31. *Ответ:* 63; 44; 36.

32. *Ответ:* 364 768 + 364 768 = 729 536.

33. *Ответ:* $142\,857 \times 7 = 999\,999$.

34. *Указание.* 24 или 15. Решить в целых числах уравнение $10x + y = 3xy$, где x — цифра десятков, y — цифра единиц.

35. *Ответ:* на 6.

36. *Указание.* $N = \overline{ab} = 10a + b$ — искомое двузначное число. Согласно условию $N = 7m + 5 = 19n + 9$, где $10 \le N \le 99$, m и n — целые неотрицательные числа; $1 \le n \le 4$ и $N = 47$ — единственное число.

37. *Указание.* Упростить в отдельности левые и правые части произведений.

38. *Ответ:* 50 139.

39. *Ответ:* 4 и 2.

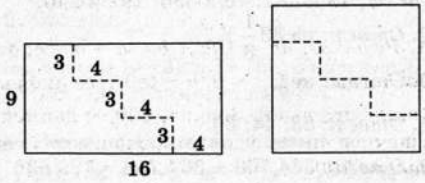
40. *Указание.* $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311$.

41. *Ответ:* 11.

42. *Ответ:* КАРЛ = 9056, ГАУСС = 10 833.

43. *Ответ:* $-\frac{1}{11}$ и -111.

44. *Решение.*



45. *Решение.* Запишем данное число в виде $111\,111\,100 + 22\,222\,220 + 1\,111\,111$. Как видно, оно кратно 1 111 111. т. е. простым не является.

46. *Решение.* Так как $-2013 + 2013 = -2012 + 2012 = \ldots = -1 + 1 = 0$, то рассматриваемая сумма будет равна $2014 + 2015 = 4029$.

47. *Указание.* Первое произведение оканчивается нулем, а второе — на 5, значит, разность оканчивается цифрой 5.

48. *Указание.* Рассмотреть 2 случая: 1) $m = 2k$ — четное, 2) $m = 2k + 1$ — нечетное.

49. *Указание.* 11 111 111 100. Искомое число должно делиться на 9 и на 25.

50. *Решение.* Так как НОД = 48, то искомые числа можно представить как $48x$ и $48y$, где $(x; y) = 1$ — взаимно простые числа.

Следовательно, $x + y = 432 : 9$, т. е. возможные пары (x, y) — это (1; 8), (2; 7), (4; 5), а искомые числа соответственно 48 и 384; 96 и 336; 192 и 240.

Ответ: 48 и 384; 96 и 336; 192 и 240.

51. *Решение.* $\overline{ab} = 10a + b = a + b + c$, откуда $c = 9a$, тогда $a = 1$, $c = 9$, $b = \overline{0;9}$ (все цифры от 0 до 9 включительно). Значит, 109 — наименьшее трехзначное число, удовлетворяющее условию.

Ответ: 109.

52. *Ответ:* x — любое число.

53. *Решение.* Числитель дроби содержит множители $20 \cdot 1$; $40 = 20 \cdot 2$; $60 = 20 \cdot 3$; ...; $2000 = 20 \cdot 100$, значит, делится на 20^{100} и тем более на 20^{10}, т. е. в знаменателе получим 1.

Ответ: 1.

54. *Решение.* Заметим, что $1313 = 1300 + 13 = 13(100 + 1) = 13 \cdot (100 + 1) = 13 \cdot 101$.

Аналогично $1717 = 17 \cdot 101$, тогда $\frac{1313}{1717} = \frac{13 \cdot 101}{17 \cdot 101} = \frac{13}{17}$. Следовательно, $\frac{1313}{1717} = \frac{13}{17}$.

55. *Указание.* Рассмотреть 25 пар чисел (1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 6), ..., (25; 50) и доказать, что среди любых 26 натуральных чисел от 1 до 50 некоторая из этих пар содержится целиком.

Для 25 чисел утверждение задачи неверно, например, числа 26, 27, ..., 50.

56. *Указание.* $400 \cdot \frac{1125}{125} = 360$ (руб.).

57. *Решение.* Если m — числитель дроби, то $(m - 1)$ — знаменатель дроби, тогда

$$m + \frac{m}{m-1} = m\left(1 + \frac{m}{m-1}\right) = m \cdot \frac{m-1+1}{m-1} = m \cdot \frac{m}{m-1}.$$

Придавая m любое натуральное значение, кроме $m = 1$, получим сколько угодно подобных равенств.

58. *Решение.* Нет, нельзя. Пусть есть p телефонов, каждый из которых соединен ровно с m другими. Заметим, что число pm всегда четно, так как оно в 2 раза больше числа проводов, соединяющих телефоны, а число $5 \cdot 133$ — нечетно.

59. *Решение.* Может, например, $6 + (-8) + 3 = 1$, а $6^2 + (-8)^2 + 3^2 = 109 > 100$.

60. *Решение.* Число делится на 12, если оно делится на 3 и 4. Так как сумма цифр $7 + 4 + 6 + 2 = 19$, то сумма двух недостающих цифр должна равняться 2, 5, 8, 11, 14 или 17.

Кроме того, искомое число должно делиться на 4, и так как предпоследняя цифра равна 2, то последняя цифра может быть 0; 4 или 8. Тогда получим 10 чисел: 724 620, 754 620, 784 620, 714 624, 744 624, 774 624, 704 628, 734 628, 764 628, 794 628.

Наименьшим из них будет 704 628, а наибольшим — 794 628.

Ответ: 704 628 и 794 628.

61. *Решение.* Пусть x, y, z — три различные цифры. Тогда сумма всех трехзначных чисел будет равна

$(100a + 10b + c) + (100a + 10c + b) + (100b + 10a + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) + (100c + 10b + a) + 222(a + b + c) = 37 \cdot 6(a + b + c)$ — делится на 37.

62. *Ответ:* 9.

Указание. $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9^3 = 729$; $9^4 = 6561$; ...; $9^{2015} = \ldots 9$.

63. *Указание.* $660 - 66 = 594$ (руб.) — стала цена портфеля.

64. *Решение.* Из условия следует, что $m(2n + 3) + n(5 - 2m) = 4(m + n)$, тогда получим $2mn + 3m + 5n - 2mn = 4m + 4n$, откуда следует, что $m = n$, что и требовалось доказать.

65. *Ответ:* 1001 и 1010%.

66. *Решение.* Заметим, что сумма двух чисел будет четной, если оба одинаковой четности, т. е. оба четные или оба нечетные. Сумма двух чисел будет нечетной, если они разной четности, т. е. одно из них четное, а другое — нечетное.

Пусть сумма двух любых соседних чисел нечетна, тогда нечетные и четные числа будут чередоваться. Значит, общее количество их будет четным. Но по условию всего 2015 чисел — нечетно, т. е. наше предположение неверно, а это означает, что найдутся 2 соседних числа, сумма которых четна.

67. *Решение.* Пусть x — пятизначное число. Приписав семерку впереди него, получим число вида $7 \cdot 10^5 + x$, а если приписать 7 в конце его, то получим $10x + 7$. Следовательно, имеем уравнение $7 \cdot 10^5 + x = 5(10x + 7)$. Решая это уравнение, получим $x = 14\,285$.

Ответ: 14 285.

68. *Ответ:* 1 234 567 890.

69. *Указание.* $(40 - 2) : 2 + 2 = 21$ (кг).

70. *Решение.* $\overline{aaabbb} = 1000\overline{aaa} + \overline{bbb} = 1000 \cdot 111a + 111b = 37 \cdot 3(1000a + b)$, т. е. делится на 37, что и требовалось доказать.

71. *Ответ:* на 34,4%.

72. *Решение.* Заметим, что на последнюю цифру данного числа будут влиять лишь последние цифры чисел, участвующих в записи данного числа. Следовательно, искомая цифра будет последней и в числе $9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 14^2 \cdot 15^2 = \ldots 0 + \ldots 0 = 0$. Значит, последняя цифра будет $0 + 0 = 0$.

Ответ: 0.

73. *Ответ:* 1.

74. *Ответ:* например, $\frac{60}{8+7} + \frac{9+1}{5} + \frac{4+2}{3} = 8$.

75. *Ответ:* $-2 \le x \le 5$; $-2 \le y \le 3$.

76. *Решение.*

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{8} & + & \boxed{7} & - & \boxed{2} \\ - & & + & & \times \\ \boxed{1} & \times & \boxed{9} & + & \boxed{4} \\ + & & - & & + \\ \boxed{6} & \times & \boxed{3} & - & \boxed{5} \end{array}$$

77. *Ответ:* 100 л.

78. *Ответ:* 19 раз.

79. *Решение.*

80. *Ответ:* 90 яиц.

81. *Указание.* $100x + 10 + y = 9(10x + y)$, или $10x + 10 = 8$, откуда $y = 5$, тогда $x = 3$. Искомое число 35.

82. *Решение.* Когда лист бумаги разрывают на три части, то общее количество листков увеличивается на 2. Первоначально их было 3, значит, всегда будет получаться нечетное количество листков, а 40 — четное число.

Ответ: нет.

83. *Ответ:* 15 ч. *Указание.* Если обозначить через x оставшуюся часть суток, то $24 - x = 0{,}6x$, откуда $x = 15$.

84. *Указание.* $\frac{1}{2}\overline{xy} = x + y$, откуда $y = 8x$, тогда $x = 1$, $y = 8$. Искомое число 18.

85. *Ответ:* например, $\frac{5}{2} - \frac{7}{3} = \frac{1}{6}$; $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$.

86. *Решение.* Допустим, что в каждом месяце родилось не более 12 учеников, тогда за 1 год (12 месяцев) родилось не более $12 \cdot 12 = 144$ детей. Но по условию задачи в 5 классах этой школы обучается $5 \cdot 29 = 145$ учеников. Получили противоречие. А это означает, что найдется такой месяц, в котором родилось больше, чем 12 учеников, т. е., например, 13.

87. *Решение.* Площадь прямоугольника равна $S = (a + b)(x + y)$. Заметим, что $ax = 2$; $ay = 6$; $bx = 4$. Кроме того, $x(a + b) = 6$ и $a(x + y) = 8$. Перемножив два последних равенства, получим: $ax(a + b)(x + y) = 6 \cdot 8$, или $2 \cdot (a + b)(x + y) = 48$, откуда $(a + b)(x + y) = S = 24$ (см²).

	a	b
x	2	4
y	6	

Ответ: 24 см².

88. *Ответ:* 25 и 75.

89. *Ответ:* через 7 лет.
Указание. $6(x + 4) = x + 59$.

90. *Решение.* Заметим, что число тем меньше, чем меньше цифры в старших разрядах. Поскольку максимальное количество девяток будет 11, то поместим их в младшие разряды, а число 1, которое осталось, — в старший разряд. Тогда искомое число будет иметь вид 1999...9, где цифра 9 записывается 11 раз.

Ответ: 199 999 999 999.

91. *Решение.* Поскольку Руслан составляет не более $100 - 89 = 11$ (%) группы, то в группе больше $100 : 11 > 9$ человек. 10 участников могут быть — Руслан и 9 девочек.

92. *Решение.* На страницы, обозначенные однозначными числами, использовано 9 цифр, двузначными — $90 \cdot 2$ цифр (двузначных цифр всего 90). Так как все трехзначные числа содержат $900 \cdot 3 = 2700$ цифр, а у нас осталось не использованных $1302 - 189 = 1113$ цифр, то эти оставшиеся 1113 цифр принадлежат трехзначным числам, которых всего $1113 : 3 = 371$. Всего будет $9 + 90 + 371 = 470$ страниц.

93. *Решение.* Если данная дробь сократима, то сократима и дробь $\dfrac{8n+5}{8n+5} = 1 + \dfrac{6n+4}{8n+5}$, а значит, и дробь $\dfrac{6n+4}{8n+5} = 3 + \dfrac{1}{2n+1}$. Но тогда сократима и дробь $\dfrac{1}{2n+1}$, что неверно.

94. *Ответ:* 60%.

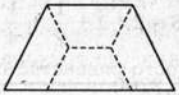
95. *Ответ:* например, 2; −3; 2; −3; 2; −3; 2.

96. *Указание.* Если $\overline{ab}$ — двузначное число, то, согласно условию, имеем: $\overline{ab} - ab = 4(a + b)$, или $a(6 - b) = 3b$, откуда $a = \dfrac{3b}{6-b}$.

Так как $1 \le a \le 9$, $0 \le b \le 9$, то $b = 3$ или $b = 4$, тогда $a = 3$ и $a = 6$. Имеем два числа 33 и 64, удовлетворяющие условию.

Ответ: 33 и 64.

97. *Решение.*



98. Чтобы распилить одно бревно, необходимо 5 распилов, тогда понадобится всего $5 \cdot 18 = 90$ распилов.

Ответ: 90.

99. *Решение.* Пусть $\overline{ab} = 10a + b$ — двузначное число, где a — цифра десятков, b — единиц. Согласно условию

$10a + b = a^2 + b^3$, или $a(10 - a) = (b - 1)(b + 1)b$.

В правой части полученного равенства — произведение трех последовательных целых положительных чисел. Этому равенству удовлетворяют 2 пары чисел:

1) $a = 4$; $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$; $b = 3$, тогда 43 — искомое число;

2) $a = 6$; $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$; $b = 3$, получим число 63.

Найденные числа удовлетворяют условию задачи, так как $43 = 4^2 + 3^3$, и $63 = 6^2 + 3^3$.

Ответ: 43 и 63.

100. *Решение.* Прямая, проходящая через одну из вершин и точку, взятую на противопо-

ложной стороне треугольника, пересечет все его стороны.

Ответ: можно.

101. *Решение.* Пусть $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{256}$, тогда $2 \cdot S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{128}$. Вычитая из второго равенства первое, находим $S = 2 - \frac{1}{256} = 1\frac{255}{256}$.

Ответ: $1\frac{255}{256}$.

102. *Решение.* Согласно условию $\overline{xyz} = 19(x + y + z)$, или $100x + 10y + z = 19(x + y + z)$, откуда $x = \frac{1}{9}(y + 2z)$, тогда при $y = 9$ и $z = 9$ получим $x = 3$, значит, 399 — наибольшее число, удовлетворяющее условию задачи.

103. *Ответ:* 10 ч.

104. *Ответ:* 3 см.

105. *Решение.* Примем объем бассейна за условную единицу.

1) За 1 ч бассейн наполняется I трубой на $\frac{1}{5}$ часть.

2) За 1 ч бассейн опорожняется I трубой на $\frac{1}{6}$ часть.

3) За 1 ч бассейн наполняется на $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ часть.

4) $1 : \frac{1}{30} = 30$ (ч) — будет наполнен весь бассейн.

Ответ: через 30 ч.

106. *Решение.* Нельзя. Любая фишка при переставлении не меняет своего порядкового номера. Чтобы поставить все фишки в обратном порядке, необходимо фишку с номером 100 поставить на первое место, но четность чисел 1 и 100 — различная.

107. *Решение.*

1) $13 + 29 = 42$; $4 + 2 = 6$; $42 + 6 = 48$.

2) $29 + 48 = 77$; $7 + 7 = 14$; $77 + 14 = 91$.

3) $48 + 91 = 139$; $1 + 3 + 9 = 13$; $139 + 13 = 152$.

Ответ: 48; 91; 152.

108. *Ответ:* $\angle 1 = 40°$, $\angle 2 = 30°$, $\angle 3 = 20°$.

109. *Ответ:* 8 прямоугольников.

110. *Решение.* $200 = 2^3 \cdot 5^2$. Поскольку множители должны быть взаимно просты, то все «двойки» должны быть в одном множителе, а все «пятерки» — в другом.

111. *Указание.* Значение дроби равно 24, тогда $24 \cdot 100 : 4{,}8 = 500$ — искомое число.

112. *Ответ:* 15 лет.

113. *Решение.* Можно, например, $91 = 13 \cdot 7$ и можно домножить на 71 единицу.

Кроме того, $91 = 13 + 7 + \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{71 \text{ раз}}$.

114. *Решение.* Пусть искомые числа x_1, x_2, x_3 и x_4, тогда $x_1 : x_2 = 2 : 3$; $x_2 : x_3 = 3 : 5$; $x_3 : x_4 = 5 : 6$, откуда $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 3 : 5 : 6$.

Следовательно, число 125 содержит $2 + 3 + 5 + 6 = 16$ равных частей, откуда $x_1 = \frac{125 \cdot 2}{16} = 15\frac{5}{8}$;

$x_2 = \frac{125 \cdot 3}{16} = 23\frac{7}{16}$; $x_3 = \frac{125 \cdot 5}{16} = 39\frac{1}{16}$; $x_4 = 46\frac{7}{8}$.

115. *Ответ:* $\frac{1}{2}$.

116. *Ответ:* 6 см.

Указание. $2x = 28 + 16 - 32$, где x — длина диагонали.

117. *Указание.* По условию $10a + b - ab = b^2$, или $a(10 - b) = b(b - 1)$, где $1 \le a \le 9$, тогда $b \in (3; 6)$. Если $b = 4$, то $a = 2$; если $b = 5$, то $a = 4$. Получим два числа 24 и 45.

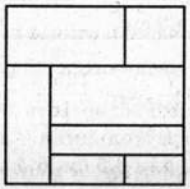
118. *Ответ:* $7\frac{7}{8}$, $7\frac{7}{8}$, $5\frac{1}{4}$.

119. *Ответ:* 1 032 456 789.

120. *Ответ:* на $\frac{1}{12}$ числа; в $1\frac{1}{3}$ раза.

121. *Решение.* Прибавим к обеим частям данного равенства $31x$, тогда $44x = 31(x + y)$. Заметим, что левая часть полученного равенства делится на 44, значит, и правая часть делится на 44. Но НОД (44; 31) = 1, т. е. 44 и 31 взаимно простые числа. Значит, на 44 делится $x + y$, т. е. $x + y$ — составное.

122. *Решение.*



123. *Указание.* $\frac{7a}{b} = \frac{a+b}{b}$, откуда $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$.

124. *Решение.* Поскольку $7 = 6 + 1$, то 7^{100} дает при делении на 6 такой же остаток, как и 1^{100} при делении на 7. Значит, искомый остаток 1.

Ответ: 1.

125. *Ответ:* 7 см.

126. *Ответ:* 15.

127. *Решение.* Расположим жильцов по возрасту и возьмем 100 самых старших. Возраст самого молодого из этой сотни не меньше, чем возраст тех, кого не включили в сотню. Предпо-

ложим, что сумма возрастов отобранной сотни меньше 3100 лет. Тогда возраст самого молодого из них меньше 3100 : 100 = 31 года. Следовательно, возраст каждого из не вошедших в сотню меньше 31 года. Значит, сумма возрастов жильцов, не вошедших в сотню, меньше 31 · 23 = 713 лет, а сумма возрастов всех жильцов меньше 3100 + 713 = 3813 лет, что противоречит условию задачи.

128. *Ответ:* 63 см².

129. *Ответ:* увеличится в 3 раза.

130. *Указание.* Рассмотреть 2 случая.

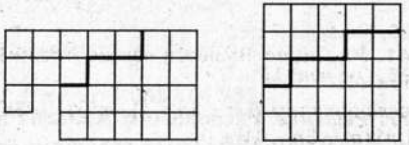
Получим 2 треугольника с длинами сторон 5 см, 5 см, 8 см; или 6,5 см, 6,5 см, 5 см.

131. *Ответ:* 18 см².

132. *Решение.* НОК (16; 72) = 144;
НОД (16; 72) = 8, тогда 144 · 100 : 8 = 1800%.

133. *Ответ:* нет.

134. *Решение.*



135. *Решение.* Поскольку $x = a - 3 - 4y$, то заданное выражение примет вид:

$a(a - 3 - 4y) + 3(a - 3 - 4y) + 4ay + 12y + 9 =$
$= a^2 - 3a - 4ay + 3a - 9 - 12y + 4ay + 12y + 9 = a^2.$

136. *Решение.* Меньшее число содержит все делители, из которых состоит НОД, и еще множитель 5. Значит, оно равно 8 · 5 = 40.

Кроме чисел 8 и 5 в большем числе будет еще 240 : (8 · 5) = 6. Таким образом, оно будет равно 8 · 6 = 48.

Ответ: 40 и 48.

137. *Ответ:* $\frac{13}{17}$ и $\frac{14}{17}$.

138. *Решение.* $\overline{abba} = 1000a + 100b + 10b + a =$
$= 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$ — делится на 11.

139. *Ответ:* 45 · 2 = 90; 13 · 6 = 78, или
15 · 4 = 60; 39 · 2 = 78.

140. *Решение.*

141. *Указание.* Вынести общие множители за скобки.

Тогда получим $7(m - 3n - 1) \cdot m^4 \cdot (1 + 3n - m) =$
$= -7m^4 (m - 3n - 1)^2 \le 0.$

142. *Решение.* За 3 ч солдат Кузнецов почистил ведро картошки, при этом он начистил

0,75 ведра. Значит, целое ведро он начистит за $3 : 0{,}75 = 4$ ч.

Ответ: за 4 часа.

143. *Ответ:* 0.

Указание. Сократить первую дробь на 5^2, а вторую — на 4^2.

144. *Решение.* Поскольку $x^2 - x = 1$, то $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = x^2(x^2 - 2x) - x(x^2 - 2x) + 2(x^2 - 2x) + 3 = x^2 \cdot 1 - x \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 = (x^2 - x) + 5 = 1 + 5 = 6$.

Ответ: 6.

145. *Ответ:* в 1,5 раза.

146. *Ответ:* 45 рублей.

147. *Решение.* Так как сумма А + А + А имеет в числе единиц число А, то либо А = 0, либо А = 5. Имеем 2 случая:

1) А = 0, тогда Н = 3, К = 1, Г = 7 и справедливо равенство: $3 \cdot И + 2 = 10 + У$.

Ясно, что $3 \le И \le 5$. Но $И \ne 3$, иначе У = К = 1; $И \ne 4$, иначе И = У = 4; $И \ne 5$, иначе У = Г = 7. Значит, $А \ne 0$.

2) А = 5, тогда или Н = 1, или Н = 8.

Но $Н \ne 1$, так как $Н \ge 3К$. Значит, Н = 8 и при этом К = 2, Г = 7 и справедливо равенство:

$3 \cdot И + 2 = 10 + У$; $3 \le И \le 5$. Но $И \ne 4$, иначе И = У = 4; $И \ne 5$, так как А = 5. Значит, И = 3; У = 1, тогда получим:

28 375 + 28 375 + 28 375 = 85 125.

148. *Указание.* $2x + 3x = 25$; $5x = 25$; $x = 5$, $2x = 10$, тогда $\frac{10}{25} \cdot 100 = 40\%$.

Ответ: 40%.

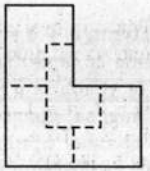
149. *Ответ:* 111 рублей.

150. *Указание.* $v_{ср.} = \dfrac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = 48$ (км/ч).

151. *Решение.* $|x - 4| = 3$; $x - 4 = \pm 3$, откуда $x = 7$ и $x = 1$.

Ответ: при $x = 7$ и $x = 1$.

152. *Решение.*



153. *Указание.* Рассмотреть 2 случая:
1) $x \ge 0$, 2) $x < 0$. Тогда $x_1 = -2{,}25$; $x_2 = 4{,}5$.
Ответ: −2,25; 4,5.

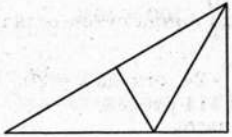
154. *Ответ:* $x = 9{,}7$.

155. *Ответ:* 85 679 + 85 679 = 171 358.

156. *Ответ:* 5.

157. *Ответ:* 27°30′.

158. *Решение.*



159. *Указание.* $99 + 999x = 99\,999$, откуда находим $x = 100$, т. е. нужно прибавить 100 раз.

Ответ: 100 раз.

160. *Решение.* Да, поскольку НОК содержит все делители НОД данных чисел.

161. *Ответ:* 257.

162. *Решение.* Пусть $a + b = 85$. Заметим, что числа a и b должны содержать делители НОК; $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Из условия $a + b = 85$ следует, что одно из чисел четное, другое — нечетное, поэтому делитель 2 должен принадлежать одному из чисел. Число 85 не делится на 3, значит, на 3 делится только одно слагаемое. Для a и b только 17 — общий делитель.

Так как $a + b = 85$, то $a = 2 \cdot 17 = 34$,

$b = 3 \cdot 17 = 51$.

Ответ: 34 и 51.

163. *Ответ:* да. Уменьшаемое и вычитаемое делится на НОД.

164. *Решение.* Пусть x часов прошло от начала суток, тогда до конца суток осталось $\frac{x}{5}$ часов.

Имеем: $x + \frac{x}{5} = 24$, откуда $x = 20$.

Ответ: 20 часов.

165. *Решение.* Простые числа больше 2 могут оканчиваться цифрами 1, 3, 7 и 9. Тогда получим $\overline{ab} \cdot \overline{cb} = \overline{250b}$. Этому равенству подходит лишь цифра 1. Прикидка дает простые числа 41 и 61, как $41 \cdot 61 = 2501$.

Ответ: 1.

166. *Ответ:* 9.

167. *Ответ:* $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. *Указание.* Показать, что наибольшая искомая дробь равна $\frac{1}{2}$.

168. *Указание.* Разность между трехзначным числом и его обращенным (т. е. записанным теми же цифрами, но в обратном порядке), делится и на 9 и на 99. Тогда $987 - 789 = 198$ делится на 9 и 99.

169. *Ответ:* 3.

170. *Ответ:* можно: $5^6 \cdot 2^6$.

171. *Указание.* Применить признаки делимости на 5 и 9. Тогда 9 876 543 210 — искомое число.

172. *Ответ:* увеличится в 8 раз.

173. *Указание.* Из трех различных цифр можно составить 6 трехзначных чисел вида $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$.

174. *Ответ:* 111 111.

175. *Указание.* Пусть x — сторона квадрата. Тогда $\frac{S_{\text{прям.}}}{S_{\text{кв.}}} = \frac{1{,}3x \cdot 0{,}7x}{x^2} \cdot 100\% = 91\%$.

176. *Ответ:* 7. *Указание.* Записать многочлен в виде

$7x^2(x^2 + 2y^2) + 13y^2(x^2 + 2y^2) + y^2$.

177. *Решение.* Поскольку слог ЛЕТ есть во всех словах, обозначим его буквой А. Так как сумма двух одинаковых четырехзначных чисел равна пятизначному числу, то П = 1, тогда получим:

$(10 \cdot А + О) \cdot 2 = 10\,000 + 1000 \cdot О + А$, или

$19 \cdot А - 998 \cdot О = 10\,000$, где А — трехзначное число, О — принимает значения 0, 1, ..., 9.

Легко показать (например, перебором), что О = 7, А = 894, тогда 8947 + 8947 = 17 894.

178. *Ответ:* $16\frac{2}{3}\%$.

179. *Решение.*

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

Учесть, что все числа как по вертикали, так и по горизонтали повторяются через две клетки, так как сумма трех чисел равна 12.

180. *Ответ:* $\frac{87}{1300}$.

181. *Ответ:* $\frac{1}{4}$.

182. *Ответ:* на 500. *Указание.* Все четные и нечетные числа подписать одно под другим в порядке возрастания.

183. *Указание.* Число 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Такие числа называются совершенными. Они могут быть найдены по формуле

$P = 2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где p — простое число.

184. *Решение.* Все простые числа, за исключением числа 2, нечетные. Разность нечетных чисел — четное число. Значит, условию задачи удовлетворяют пары простых чисел, разность которых равна 2. В первой сотне таких чисел близнецов всего 8: (3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19), (29; 31), (41; 43), (59; 61), (71; 73).

185. *Ответ:* Такого числа не существует. *Указание.* Учесть, что квадраты целых чисел не могут оканчиваться цифрой 8.

186. *Решение.* Когда по радио передавали точно 12 ч, то Машины часы показывали на 10 мин меньше, т. е. 11 ч 50 мин. Оставалось еще 10 мин, но в течение этих 10 мин часы Маши

отстанут еще на 20 с. Значит, 12 часов на Машиных часах будет через 10 мин и 20 с.

Ответ: через 10 мин и 20 с.

187. *Ответ:* 35.

188. *Ответ:* на 45.

189. *Решение.* Пусть было x скамеек. На каждой скамейке сидело y мальчиков и одна девочка, т. е. $x = y + 1$. Следовательно, было $x(y + 1) = x^2$ человек. Поскольку $8^2 < 70 < x^2 < 90 < 10^2$, то $x = 9$; $y = 8$. Значит, был 81 школьник, которые сидели на 9 скамейках.

Ответ: 81 школьник и 9 скамеек.

190. *Ответ:* НОК = $15b$, НОД = b.

191. *Указание.* $1 : \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{12}{25}$.

192. *Ответ:* 4 груши.

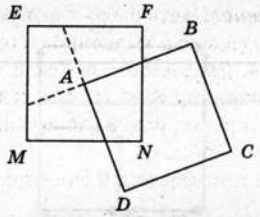
193. *Указание.* Имение следует разделить между сыном, женой и дочерью пропорционально числам 4 : 2 : 1.

194. *Ответ:* 68 и 153.

195. *Ответ:* 3 куропатки, 5 голубей, 22 воробья.

196. *Ответ:* 21.

197. *Решение.* Продолжим стороны угла A; при этом квадрат $FNME$ разобьется на 4 равных четырехугольника. Значит, площадь общей части равна $\frac{1}{4}$ площади квадрата $FNME$. Результат не зависит от того отношения, в котором AB делит FN. Он не зависит также и от размеров квадрата; нужно только, чтобы $AB \geq \frac{MF}{2}$.



198. *Ответ:* $\frac{2015}{2014}$.

Указание. Общий вид таких дробей $\frac{2015+2015n}{2014+2014n}$, где n — натуральное число.

199. *Решение.* Воспользоваться формулой $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$, которую следует применять столько раз, пока все члены исследуемой суммы не станут различными:

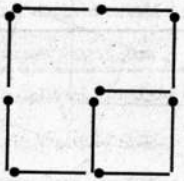
$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\right) =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{31} + \frac{1}{930}.$$

200. *Решение.* Пусть искомое расстояние равно $2x$ шагам. Согласно условию $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 250$, откуда $x = 1500$, тогда $2x = 3000$, т. е. до школы 3000 шагов.

Ответ: 3000.

201. *Решение.*



202. *Ответ:* 4 кошки.

203. *Ответ:* $1000 = 8 + 8 + 8 + 88 + 888$.

204. *Ответ:* в 2,5 раза.

205. *Решение.* $79\frac{1}{3} + 5 = 84 + \frac{2}{6}$.

206. *Решение.* Заметим, что каждая грань большого кубика в 16 раз больше грани меньшего. Тогда и краски понадобится в 16 раз больше, т. е. $5 \cdot 16 = 80$ (г).

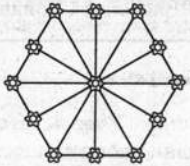
Ответ: 80 г.

207. *Решение.* Имеем уравнение $7{,}5x = 6{,}5y$, откуда следует, что $x < y$, если $x > 0$, $y > 0$; $x = y$, если $x = 0$, $y = 0$; $x > y$, если $x < 0$, $y < 0$.

208. *Решение.* Скорость перемещения пассажира, находящегося во втором поезде, относительно двигающегося первого поезда будет равна $40 + 50 = 90$ (км/ч) $= 25$ (м/с). Значит, длина первого поезда равна $25 \cdot 6 = 150$ (м).

Ответ: 150 м.

209. *Решение.*



210. *Ответ:* 1001 и 1010%.

211. *Ответ:* в 10 раз.

212. *Ответ:* 20 коров.

213. *Ответ:* 8 г.

214. *Ответ:* 13.

215. *Ответ:* 133 и 13.

216. *Ответ:* 38 яблок.

217. *Ответ:* на 2664.

218. *Указание.* Периметр $P = 2(a + b)$ — четное число.

219. *Указание.* $\overline{abc}$ — трехзначное число, $a + b + c$ — сумма его цифр.

220. *Ответ:* 20 секунд.

221. *Ответ:* на 16 частей.

222. *Ответ:* $x_1 = -0{,}7$; $x_2 = 0{,}7$.

Указание. $|-0{,}21| = 0{,}21$; $|-0{,}3| = 0{,}3$.

223. *Ответ:* 15 732 и 15 768.

Указание. Применить признаки делимости на 9 и 4.

224. *Ответ:* 142 кг.

225. *Указание.* Учесть, что площадь прямоугольника равна площади квадрата.

226. *Ответ:* $x = 7$.

227. *Ответ:* 54. *Указание.* $10a + b - (a + b) = 10b + a$.

228. *Ответ:* 17.

229. *Решение.* Приведем сумму дробей к общему знаменателю:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{1}{30}(2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 5).$$

Как видно, каждое слагаемое в скобке, кроме $2 \cdot 3$, кратно 5, следовательно, вся сумма не делится на 5, а это и значит, что значение выражения не может равняться нулю.

230. *Ответ:* 1,25 мин. *Указание.* $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$; $1 : \frac{4}{5} = 1{,}25$ (мин).

231. *Решение.* Не может, так как либо A, либо B является суммой двух нечетных чисел и одного четного. Значит, либо A, либо B является четным числом. Следовательно, AB не может быть нечетным числом.

232. *Указание.* $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 101a + 10b = 13 \cdot 7a + 10(a + b)$.

233. *Решение.* Из условия имеем, что $\overline{COH} = \overline{OH} \cdot 5$, т. е. $C \cdot 100 + \overline{OH} = \overline{OH} \cdot 5$, откуда $C \cdot 100 = \overline{OH} \cdot 4$ и $C \cdot 25 = \overline{OH}$. Поскольку $\overline{OH}$ двузначное, то $C = 1$; 2 или 3. Тогда $\overline{COH} = 125$; 250 или 375.

Ответ: $125 : 25 = 5$; $250 : 50 = 5$; $375 : 75 = 5$.

234. *Решение.* Первое блюдо можно выбрать четырьмя способами. Независимо от этого, второе блюдо можно выбрать шестью, а третье — тремя способами. Значит, обед можно выбрать $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$ способами.

Ответ: 72.

235. *Решение.* Нет, нельзя. Число стаканов, стоящих вниз дном после каждого переворачивания, нечетно.

236. *Ответ:* 1) $376 \cdot 376 = 141\,376$;
2) $625 \cdot 625 = 390\,625$.

237. *Ответ:* 6.

238. *Ответ:* −15; −14; −13; −12; −11; −10; −9.

239. *Ответ:* 123.

240. *Ответ:* $22\,201 = 149^2$. *Указание.* Учесть, что квадрат натурального числа не может оканчиваться цифрой 2 или одним нулем.

241. *Решение.* Поскольку 157 — простое число, то либо 157 кошек съели по одной мышке, либо 1 кошка съела 157 мышек. Так как кошек должно быть меньше мышек, то была одна кошка.

Ответ: 1 кошка.

242. *Решение.* Пусть в классе М — мальчиков и Д — девочек, тогда имеем:

$$(3{,}8\ М + 3{,}5\ Д) : (М + Д) = 3\frac{8}{13}, \text{ или}$$

$$3{,}8 \cdot 13\ М + 3{,}5 \cdot 13\ Д = 47\ М + 47\ Д,$$

$$М\,(3{,}8 \cdot 13 - 4{,}7) = Д\,(47 - 3{,}5 \cdot 13), \text{ откуда}$$

$$М = \frac{5}{8}Д.$$

Количество детей, писавших контрольную, равно $Д + \frac{5}{8}Д = \frac{13}{8}Д$, где $\frac{Д}{8}$ — целое число. Заметим, что существует единственное целое $k = 2$, такое, что $20 < 13k < 30$.

Контрольную работу писали 26 учеников.

Ответ: 26.

243. *Решение.* Пусть H — высота стены, v — скорость первого паука, t_1 — время, затраченное первым пауком на подъем и спуск.

Заметим, что $t_1 = \frac{H}{v} + \frac{H}{v} = \frac{2H}{v}$.

Второй паук затратил на подъем и спуск время $t_1 = \frac{3H}{v} + \frac{H}{3v} = \frac{10H}{3v}$.

Так как $t_1 < t_2$, то первый паук спустился быстрее.

Ответ: первый.

244. *Решение.* Число делится на 72, если оно делится и на 9, и на 8. Число делится на 8, если три последние цифры представляют число, кратное 8. Условию задачи удовлетворяют числа: 762 408; 767 448; 763 488.

Ответ: 762 408; 767 448; 763 488.

245. *Ответ:* на 26,5 %.

246. *Ответ:* заяц внес 900 руб., а волк внес 1600 руб.

Указание. Пусть заяц внес x руб., тогда получим уравнение

$x + 2\,(x - 100) = 2500$, и т. д.

247. *Решение.* Наименьшее двузначное число, являющееся квадратом, начинается с $16 = 4^2$. Имеем: $4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2$. Нетрудно проверить, что единственное число, удовлетворяющее условию задачи, является число 64, так как $8^2 = 4^3 = 64$.

Ответ: 64.

248. *Решение.* Пусть x — длина поезда, тогда скорость поезда мимо неподвижного пассажира $\frac{x}{7}$ м/с, а скорость поезда мимо платформы будет $\frac{x+378}{25}$ м/с. Согласно условию задачи эти скорости равны, т. е. имеем уравнение $\frac{x}{7} = \frac{x+378}{25}$, откуда находим $x = 147$. Следовательно, длина поезда 147 м.

Ответ: 147 м.

249. *Решение.* Допустим обратное, т. е. ученики собрали разное количество арбузов, тогда они собрали всего не больше, чем

$$0 + 1 + 2 + ... + 15 + 16 = 136 > 100.$$

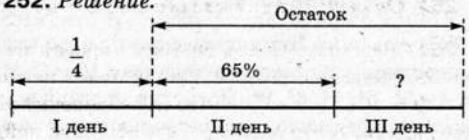
Получили противоречие с условием, что и доказывает утверждение задачи.

250. *Решение.* Так как $-1004 + 1004 = -1003 + 1003 = ... = -1 + 1 = 0$, то рассматриваемая сумма будет равна $1005 + 1006 = 2011$.

Ответ: 2011.

251. *Ответ:* 100 слагаемых.

252. *Решение.*



Всего 160 стр.

1) $160 \cdot \frac{1}{4} = 40$ (стр.) — за один день.

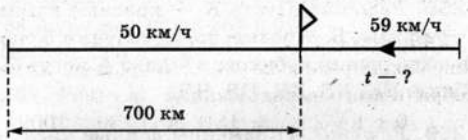
2) $160 - 40 = 120$ (стр.) — осталось прочитать.

3) $65\ \% = 0{,}65$; $120 \cdot 0{,}65 = 78$ (стр.) — за II день.

4) $120 - 78 = 42$ (стр.) — за III день.

Итак, в I день ученик прочитал 40 страниц, во II день – 78 страниц и в III день – 42 страницы.

253. *Решение.*



$S = 1231$ км.

1) $700 : 50 = 14$ (ч) — шел I поезд до встречи.

2) $1231 - 700 = 531$ (км) — прошел II поезд до встречи.

3) $531 : 59 = 9$ (ч) — шел II поезд до встречи.

4) $14 - 9 = 5$ (ч).

Следовательно, II поезд вышел на 5 ч позже I.

Ответ: на 5 ч.

254. *Ответ:* 100 г. *Указание.* $3 : 5 = 60 : x$.

255. *Решение.* Пусть во всех классах не менее 35 учеников, тогда в школе будет не менее $35 \cdot 29 = 1015$ учеников, что противоречит условию задачи. А это означает, что в школе найдется класс, в котором менее, чем 35 учеников.

256. *Решение.* У большого кубика площадь одной грани равна $6 \cdot 6 = 36$, а у маленького кубика равна $3 \cdot 3 = 9$, т. е. каждая грань большого кубика в 4 раза больше грани маленького, а значит, и краски понадобится в 4 раза больше, т. е. $3 \cdot 4 = 12$ г.

Ответ: 12 г.

257. *Решение.* Если бы в каждой конюшне было по четному числу лошадей, то общая их сумма была бы четным числом, а не 79.

258. *Решение.* Пусть К — красные кубики, Ч — черные, Б — белые, тогда получим 5 способов размещения кубиков; в ящике А могут быть кубики: КК, КБ, КЧ, ЧБ, ЧЧ.

259. *Решение.* 1) Заменим данные числа обратными: $\frac{3}{1}; \frac{5}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{1}$.

2) Составим отношение полученных чисел:

$$\frac{3}{1}; \frac{5}{4}; \frac{4}{9}; \frac{1}{1}.$$

3) Заменим отношения целыми числами, для чего умножим каждый член отношения на наименьший общий знаменатель 36:

$$\frac{3}{1} : \frac{5}{4} : \frac{4}{9} : \frac{1}{1} = \frac{108}{36} : \frac{45}{36} : \frac{16}{36} : \frac{36}{36}.$$

4) Умножим каждый член отношения и найдем его значение:

$108k + 45k + 16k + 36k = 1025$, откуда $k = 5$.

5) Найдем искомые числа:

$108k = 540$; $45k = 225$; $16k = 80$; $36k = 180$.

6) Проверка: $540 + 225 + 80 + 180 = 1025$.

$540 : 225 : 80 : 180 = 108 : 45 : 16 : 36$ (сократили на 5).

Итак, искомые числа: 540; 225; 80; 180.

Ответ: 540; 225; 80; 180.

260. *Решение.* Пусть x — искомое число, тогда $6x = a^3$, и так как a^3 кратно 6, то и само число a кратно 6, т. е. $a = 6b$. Но тогда $x = 36b^3$. Так как искомое число трехзначное, то возможно значение $b = 2$, тогда $x = 36 \cdot 8 = 288$, и $b = 3$, $x = 36 \cdot 27 = 972$. Итак, искомые числа 288 и 972.

Ответ: 288 и 972.

261. *Решение.* Если разделить число 777...77 на 19 «уголком», то заметим, что I нулевой остаток достигается для числа, состоящего из 18 семерок, а в дальнейшем остатки будут повторяться. Значит, число 777...77 кратно 19, если число его цифр кратно 18.

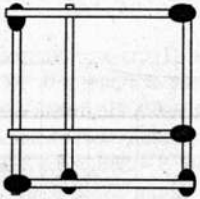
262. *Указание.* Выписать все трехзначные числа, кратные 19, затем среди них выбрать 3 числа с различными цифрами, дописав в качестве последней цифры число 0 так, чтобы одно из полученных чисел было наибольшим, а другое — наименьшим.

Тогда 9 128 364 750 — наибольшее,
2 473 615 890 — наименьшее.

263. *Указание.* $a^2 - 3a = (a - 1)a - 2a$. $(a - 1)a$ — произведение двух целых последовательных

чисел, кратное 2, так как одно из них четное, а другое — нечетное; $2a$ — кратно 2 при любом целом a.

264. Решение (см. рис.).



265. *Ответ:* 28 человек. *Указание.* Задача сводится к уравнению $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$, откуда находим $x = 28$.

266. *Ответ:* 14.

Указание. Вынести за скобки общий множитель 3,4. Тогда получим $\frac{7}{17} \cdot 3{,}4 \cdot 10$, и т. д.

267. *Ответ:* $x_1 = 0$; $x_2 = -1$.

268. *Ответ:* на I полке было 13 книг, на II — 23 книги, на III — 16 книг.

269. *Ответ:* 20.

270. *Ответ:* 25π м^2.

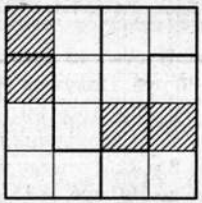
271. *Ответ:* $MC = 9$ см, $CN = 4$ см.

272. *Ответ:* делится.

273. *Указание.* 50 %, так как НОД = 12, НОК = 24.

274. *Ответ:* 36; 32 и 34.

275. *Решение.*

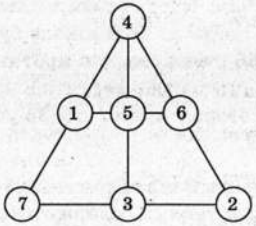


276. *Ответ:* 431 635 + 431 635 = 863 270.

277. *Ответ:*

5	8	1	3	4
2	9	0	6	7

278. *Ответ:* (см. рис.).



279. *Ответ:* (см. рис.).

	К	З	7		К	З	7
0	0	0	0	5	4	0	7
1	0	0	7	6	4	3	4
2	0	3	4	7	4	0	4
3	4	3	0	8	4	3	1
4	4	0	0	9	5	3	0

280. *Решение.* Пусть x кг орехов по 180 руб. и $(90 - x)$ кг по 120 руб. Получим уравнение

$180x + (90 - x)\,120 = 150 \cdot 90$.

Разделив обе части уравнения на 60, имеем $3x + (90 - x) \cdot 2 = 225$, откуда находим $x = 45$.

Ответ: 45 кг по 180 руб. и 45 кг по 120 руб.

281. *Ответ:* $\frac{11}{12}$.

282. *Ответ:* $\frac{2014}{2015}; \frac{2013}{2014}; \frac{2012}{2013}; \frac{2011}{2012}$.

Указание. Дополнить каждую дробь до 1 и сравнить их.

283. *Решение.* Пусть во всех классах не менее 33 ученика, тогда во всей школе будет не менее $33 \cdot 32 = 1056$ учеников, что противоречит условию задачи. А это означает, что в школе найдется класс, в котором менее, чем 33 ученика.

Ответ: да.

284. *Решение.* Заметим, что $24\,543 = 3^5 \cdot 101$. Поскольку все тройки содержатся в одном числе, то эти числа будут $3^5 = 243$ и 101. Так как НОК (243; 101) $= 243 \cdot 101$, то оно будет равно $243 \cdot 101 = 24\,543$.

Ответ: 243 и 101.

285. *Решение.* Удвоенная масса всех ребят равна 390 кг, значит, масса всех будет $390 : 2 = 195$ кг. Поскольку масса Веры, Кати, Саши и Паши равна $60 + 110 = 170$ кг, то масса Маши равна $195 - 170 = 25$ кг.

Ответ: 25 кг.

286. *Решение.* Заметим, что разность $2014 - 2013 = 1$, аналогично $2012 - 2011 = 1$ и т. д. А таких разностей будет $2014 : 2 = 1007$. Следовательно, значение выражения равно 1007.

Ответ: 1007.

287. *Решение.* Поскольку сумма пяти нечетных чисел является числом нечетным, а нечетное число не делится нацело на 40, то выбрать 5 чисел из таблицы нельзя.

Ответ: нет.

288. *Ответ:* на 500.

289. *Решение.*

1. Вначале переправляются двое легких.
2. Один из них переправляет лодку обратно.
3. Самый тяжелый из них садится в лодку и переплывает один.
4. Второй (из легких) садится в лодку и переплывает обратно.

5. Двое легких садятся в лодку и переправляются на другой берег.

290. *Ответ:* 12.

291. *Решение.* Два персика разрезать пополам, а один – двумя разрезами на 4 части. Тогда выполним всего 4 разреза.

292. *Ответ:* в 4 раза.

293. *Ответ:* 14 см^2.
Указание. $S = 2(ab + bc + ac)$, где a, b, c — измерения параллелепипеда.

294. *Решение.* $72 + 66 - 27 = 100$ и $(78 + 18) \cdot (6 - 5) \cdot 4 = 100$.

295. *Ответ:* 36 партий.

296. *Ответ:* уменьшилось на 1%.

297. *Решение.* Кузнечик делает два больших прыжка из точки M в направлении MN, в результате будет на расстоянии $10 \cdot 2 = 20$ см от точки M, а затем в обратном направлении он делает три маленьких прыжка, т. е. $6 \cdot 3 = 18$ см и оказывается в точке N.

298. *Решение.* Время движения по маршруту будет равно $8 \cdot 60 : 30 = 16$ минут. Значит, двух маршруток будет достаточно.
Ответ: 2.

299. *Решение.* Високосный, поскольку в обычном году 1 января и 1 октября приходятся на один день недели.
Ответ: високосный.

300. *Решение.* 5 месяцев. Обычный год при этом должен начинаться с пятницы, а високосный – с четверга или пятницы.

Раздел III

УДИВИТЕЛЬНЫЕ РАВЕНСТВА

1. Число 12 345 679.

Если умножить это число на число, кратное 9, то получим число с одинаковыми цифрами:

$12\,345\,679 \cdot 9 = 111\,111\,111,$

$12\,345\,679 \cdot 18 = 222\,222\,222,$

$12\,345\,679 \cdot 27 = 333\,333\,333,$

$12\,345\,679 \cdot 81 = 999\,999\,999.$

2. Игра с цифрами.

$123 - 45 - 67 + 89 = 100$ (минимальное число знаков 3).

$98 - 76 + 54 + 3 + 21 = 100$ (минимальное число знаков 4).

3. Арифметический курьез: $2^5 \cdot 9^2 = 2592$.

4. Число 100:

$$91 + \frac{5823}{647} = 100; \qquad 94 + \frac{1578}{263} = 100;$$

$$96 + \frac{1428}{357} = 100.$$

Во всех случаях употреблены все натуральные числа от 1 до 9 включительно. Существуют и другие равенства.

5. Сумма равна произведению:

$2 + 2 = 2 \cdot 2; 3 + 1{,}5 = 3 \cdot 1{,}5; 11 + 1{,}1 = 11 \cdot 1{,}1;$

$21 + 1\frac{1}{20} = 21 \cdot 1\frac{1}{20}$, и т. д.

6. Разность равна произведению:

$1 - 0{,}5 = 1 \cdot 0{,}5; 6 - \frac{6}{7} = 6 \cdot \frac{6}{7};$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}; \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$, и т. д.

7. Интересное произведение:

$6 \cdot 21 = 126$ — произведение записано цифрами сомножителей, но в обратном порядке.

Аналогично $3 \cdot 51 = 153$.

Существуют ли аналогичные произведения?

8. Интересное сокращение дроби $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$.

Равенство верное, хотя так сокращать нельзя.

Аналогично: $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}; \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$.

Можно ли подобрать еще такую правильную дробь?

9. Разные действия, один результат:

$2 + 2 = 2 \cdot 2,$

$1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$

$1 + 1 + 2 + 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4,$

$1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5,$

$1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3,$

$1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и т. д., можно составить группы из 6 или 7 и т. д. чисел.

10. Сумма двух дробей равна 1:

$$0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot (9 - 8) \cdot (7 - 6) \cdot (4 - 3) = 1.$$

Аналогично: $\frac{35}{70} + \frac{148}{296} = 1.$

Во всех случаях употреблены все цифры от 0 до 9 (по одному разу). Можно ли составить аналогичные равенства?

11. Все цифры различные:

$1738 \cdot 4 = 6952$; $483 \cdot 12 = 5796$;
$1963 \cdot 4 = 7852$; $297 \cdot 18 = 5346$;
$198 \cdot 27 = 5346$; $157 \cdot 28 = 4396$;
$138 \cdot 42 = 5796$; $186 \cdot 39 = 7254$.

12. $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$.

Составить аналогичное равенство из этих же чисел в том же порядке, используя лишь знаки сложения.

13. Равные дроби: $\frac{41}{77} = \frac{4141}{7777} = \frac{414141}{777777}$.

14. Сумма смешанных дробей равна 100.

Например: $78\frac{3}{6} + 21\frac{45}{90} = 100,$

или $50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100.$

Здесь также каждая цифра употреблена 1 раз. Возможны другие решения.

15. Сумма и произведение чисел каждой пары отличаются только расположением цифр:

$9 + 9 = 18$; $24 + 3 = 27$; $47 + 2 = 49$;
$9 \cdot 9 = 81$; $24 \cdot 3 = 72$; $47 \cdot 2 = 94$;
$263 + 2 = 265$; $497 + 2 = 499$;
$263 \cdot 2 = 526$; $497 \cdot 2 = 994$.

16. Особое число:

13 452 — искомое число; $13 \cdot 4 = 52$.

Таким же свойством обладает число 947 658, так как $94 \cdot 7 = 658$.

17. Новые суммы и произведения:

$49997 + 2 = 49999$; $4997 + 2 = 4999$;
$49997 \cdot 2 = 99994$; $4997 \cdot 2 = 9994$;
$2963 + 2 = 2965$; $29\,963 + 2 = 29\,965$;
$2963 \cdot 2 = 5926$; $29\,963 \cdot 2 = 59\,926$;

18. Удивительное равенство:

$989\,010\,989 \cdot 123\,456\,789 =$
$= 122\,100\,120\,987\,654\,321$.

19. Используя три из четырех арифметических действий:

$7 + 1 = 8$; $9 - 6 = 3$; $4 \cdot 5 = 20$.

Использованы все 10 цифр.

20. Произведение двузначных чисел не изменится, если в каждом из сомножителей переставить цифры:

$12 \cdot 42 = 21 \cdot 24$; $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$;
$12 \cdot 63 = 21 \cdot 36$; $24 \cdot 84 = 42 \cdot 48$;
$12 \cdot 84 = 21 \cdot 48$; $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$;
$13 \cdot 62 = 31 \cdot 26$; $36 \cdot 84 = 63 \cdot 48$;
$23 \cdot 96 = 32 \cdot 69$; $46 \cdot 96 = 64 \cdot 69$.

Аналогичным свойством обладают еще 4 пары чисел. Найдите их.

21. Для трехзначных чисел:
$102 \cdot 402 = 201 \cdot 204$; $102 \cdot 603 = 201 \cdot 306$;
$112 \cdot 422 = 211 \cdot 224$; $112 \cdot 633 = 211 \cdot 336$;
$122 \cdot 442 = 221 \cdot 244$; $122 \cdot 663 = 221 \cdot 366$;
$132 \cdot 462 = 231 \cdot 264$; $132 \cdot 693 = 231 \cdot 396$;
$142 \cdot 482 = 241 \cdot 284$; $103 \cdot 602 = 301 \cdot 206$.
Таких равенств всего 60. Интересно найти общее решение.

22. Равенство вида $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{cd} + \overline{dc}$:
$32 + 23 = 14 + 41$; $52 + 25 = 16 + 61$;
$42 + 24 = 15 + 51$; $43 + 34 = 52 + 25 = 16 + 61$;
$52 + 25 = 34 + 43$; $19 + 91 = 28 + 82 = 37 + 73 = 46 + 64$.
Остальные равенства найдите самостоятельно.

23. Двузначные числа, оканчивающиеся на 9:
$19 = 1 \cdot 9 + 1 + 9$; $39 = 3 \cdot 9 + 3 + 9$;
$29 = 2 \cdot 9 + 2 + 9$; $49 = 4 \cdot 9 + 4 + 9$, и т. д.
Аналогично для многозначных чисел:
$849 = 84 \cdot 9 + 84 + 9$;
$13\,759 = 1375 \cdot 9 + 1375 + 9$;
$1\,111\,119 = 111\,111 \cdot 9 + 111\,111 + 9$;
$131\,313\,139 = 13\,131\,313 \cdot 9 + 13\,131\,313 + 9$,
и т. д.
Обобщить на случай многозначных чисел.

24. Числа вида $\overline{abb} \cdot \overline{ccd} = \overline{bba} \cdot \overline{dcc}$:
$112 \cdot 422 = 211 \cdot 224$; $223 \cdot 966 = 322 \cdot 669$;
$122 \cdot 442 = 221 \cdot 244$; $233 \cdot 996 = 332 \cdot 699$;

$224 \cdot 844 = 422 \cdot 448$; $334 \cdot 866 = 433 \cdot 668$;
$244 \cdot 884 = 442 \cdot 488$; $344 \cdot 886 = 443 \cdot 688$.
Всего таких равенств 18. Попробуйте найти.

25. Числа вида $\overline{aac} \cdot \overline{bb} = \overline{bbb} \cdot \overline{aa}$:
$111 \cdot 22 = 222 \cdot 11$; $222 \cdot 33 = 333 \cdot 22$;
$111 \cdot 33 = 333 \cdot 11$; $222 \cdot 44 = 444 \cdot 22$;
$111 \cdot 44 = 444 \cdot 11$; $222 \cdot 55 = 555 \cdot 22$, и т. д.

26. Числа вида $\overline{ab} - \overline{cd} = a + b + c + d$:
$30 - 18 = 3 + 0 + 1 + 8$;
$31 - 18 = 3 + 1 + 1 + 8$;
$41 - 27 = 4 + 1 + 2 + 7$;
$53 - 36 = 5 + 3 + 3 + 6$;
$66 - 45 = 6 + 6 + 4 + 5$;
$79 - 54 = 7 + 9 + 5 + 4$;
$83 - 63 = 8 + 3 + 6 + 3$;
$95 - 72 = 9 + 5 + 7 + 2$ и т. д.

27. Равенства $a \cdot b^3 = a^3 : b$.
Например: $4 \cdot 2^3 = 4^3 : 2$; $9 \cdot 3^3 = 9^3 : 3$.
Есть ли еще подобные равенства?

28. Равенство $\overline{ab} - c = a \cdot b \cdot c$.
Например, $18 - 2 = 1 \cdot 8 \cdot 2$,
$26 - 2 = 2 \cdot 6 \cdot 2$,
$12 - 4 = 1 \cdot 2 \cdot 4$.
Найдите еще такие равенства.

29. Равенство $\overline{abc} = \overline{ab^2} + c$.
$100 = 10^2 + 0$; $103 = 10^2 + 3$;
$101 = 10^2 + 1$; $104 = 10^2 + 4$;
$102 = 10^2 + 2$; $105 = 10^2 + 5$ и т. д.

30. Равенство $\overline{ab} = a^2 + a + b$:
$90 = 9^2 + 9 + 0$; $92 = 9^2 + 9 + 2$;
$91 = 9^2 + 9 + 1$; $93 = 9^2 + 9 + 3$ и т. д.

31. Равенство $\overline{ab} = a + b + b^2$.
Например: $13 = 1 + 3 + 3^2$.
Существует ли еще число подобного вида?

32. Равенство $\overline{ab} = a^3 + a + b$:
Например: $30 = 3^3 + 3 + 0$;
$31 = 3^3 + 3 + 1$;
$32 = 3^3 + 3 + 2$ и т. д.

33. Равенство $\overline{aa} = a + a + a^3$.
Например: $33 = 3 + 3 + 3^3$.
Сколько таких чисел?

34. Равенство $\overline{ab} = a^2 + b^2 + b$:
$13 = 1^2 + 3^2 + 3$; $24 = 2^2 + 4^2 + 4$;
$55 = 5^2 + 5^2 + 5$; $84 = 8^2 + 4^2 + 4$;
$93 = 9^2 + 3^2 + 3$.

35. Равенство $\overline{ab} = a \cdot b + b^2$:
$24 = 2 \cdot 4 + 4^2$: $45 = 4 \cdot 5 + 5^2$.

36. Равенство $\overline{abc} = \overline{ab^2} - c^2$:
$147 = 14^2 - 7^2$ — единственное равенство.

37. Равенство $\overline{ab} = a^2 + b^2 - (a + b)$:
$36 = 3^2 + 6^2 - (3 + 6)$.
Найдите еще одно число, обладающее подобным свойством.

38. Интересные суммы:

$$\begin{array}{r} 173 \\ +\ 4 \\ \hline 177 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85 \\ +\ 92 \\ \hline 177 \end{array}$$

Здесь использованы цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 двумя группами по 4 цифры так, чтобы суммы оказались равны между собой.

39. $12 = 13$?
Рассмотрим верное равенство
$24 + 36 - 60 = 26 + 39 - 65$, или
$12 \cdot (2 + 3 - 5) = 13 \cdot (2 + 3 - 5)$.
Так как произведения равны и вторые сомножители равны, то $12 = 13$. Где ошибка?

40. Все цифры от 1 до 9 включительно:

$1 = 1^{23456789}$; $2 = \dfrac{13458}{6729}$; $3 = \dfrac{17469}{5823}$;

$4 = \dfrac{15768}{3942}$; $5 = \dfrac{13485}{2697}$; $6 = \dfrac{17658}{2943}$;

$7 = \dfrac{16758}{2394}$; $8 = \dfrac{25496}{3187}$; $9 = \dfrac{57429}{6381}$.

41. Трехзначное число, делящееся на квадрат суммы своих цифр:

$\dfrac{162}{(1+6+2)^2} = 2$; $\dfrac{243}{(2+4+3)^2} = 3$;

$\dfrac{324}{(3+2+4)^2} = 4$; $\dfrac{392}{(3+9+2)^2} = 2$;

$\dfrac{405}{(4+0+5)^2} = 5$; $\dfrac{512}{(5+1+2)^2} = 8$;

$$\frac{605}{(6+0+5)^2} = 5; \qquad \frac{648}{(6+4+8)^2} = 2;$$

$$\frac{810}{(8+1+0)^2} = 10; \qquad \frac{972}{(9+7+2)^2} = 3.$$

42. Равные дроби:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{79}{158}; \qquad \frac{3}{6} = \frac{7}{14} = \frac{29}{58};$$

$$\frac{3}{6} = \frac{9}{18} = \frac{27}{54}; \qquad \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{58}{174}.$$

В каждом случае использованы все цифры от 1 до 9 включительно.

43. Число 2 438 195 760 составлено из всех десяти цифр так, что оно делится на все числа от 2 до 18. Существует еще 3 таких числа. Найдите их.

44. Квадраты двузначных чисел и их перестановки:

$12^2 = 144$, $13^2 = 169$,
$21^2 = 441$, $31^2 = 961$.

Как видим, сами числа и их квадраты отличаются лишь перестановкой цифр.

45. Квадраты трехзначных чисел и их перестановки.

$102^2 = 10\,404$, $112^2 = 12\,544$, $122^2 = 14\,484$,
$201^2 = 40\,401$, $211^2 = 44\,521$, $221^2 = 48\,841$,
$103^2 = 10\,609$, $113^2 = 12\,769$,
$301^2 = 90\,601$, $311^2 = 96\,721$.

46. Красивое равенство: $81 = (8 + 1)^2$.

47. Квадрат-палиндром: $836^2 = 698\,896$.

Полученное число — четное. Его можно читать как слева направо, так и наоборот.

Среди всех квадратов, имеющих четное число цифр, палиндромический квадрат — наименьший.

48. Тройки и семерки.

Число 3 333 377 733 — наименьшее, которое делится на 3 и на 7. Кроме того, сумма цифр $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3 = 42$ также делится на 3 и на 7.

49. Сумма простых чисел:

$$\begin{array}{r} 61 \\ +283 \\ \hline 47 \\ \hline 59 \\ \hline 450 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ 61 \\ +89 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline 207 \end{array}$$

При сложении использованы лишь простые числа. Каждая из 9 цифр использована 1 раз.

50. Представить число 222 с помощью цифр от 1 до 9 включительно, используя знаки «+» и «−» (без скобок).

$123 + 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 222$,
$1 + 234 + 5 + 6 - 7 - 8 - 9 = 222$,
$1 + 234 + 56 - 78 + 9 = 222$.

Все числа расположены последовательно.

51. Число 100 наименьшим количеством разных цифр (используя знаки «+», без скобок).

$1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100,$

$1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100.$

52. Равенство вида $\overline{ab} = a^2 + b^3$:

$63 = 6^2 + 3^3.$

Существуют ли еще числа подобного вида?

53. Пятая степень суммы цифр трехзначного числа равна квадрату этого числа:

$243^2 = (2 + 4 + 3)^5.$

54. Четырехзначное число, равное четвертой степени суммы его цифр: $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4$. Сколько решений имеет задача?

55. Совершенные числа.

Так называются натуральные числа, равные сумме всех своих делителей, не считая самого числа.

Наименьшим совершенным числом является 6:

$6 = 1 + 2 + 3.$

За ним следует число 28:

$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, далее число 496:

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.$

Эти (и другие) числа могут быть найдены по формуле:

$P = 2^{p-1}(2^p - 1)$, где p — простое число.

В настоящее время известно 38 совершенных чисел, из которых последние 26 найдены с помощью ЭВМ. До сих пор неизвестно, существует ли хотя бы одно нечетное совершенное число. По последним сообщениям Брайена Такхермана из IBM (американская фирма, выпускающая вычислительное оборудование), нечетное совершенное число должно иметь по крайней мере 36 знаков.

56. Дружественные числа.

Если сумма делителей одного из двух чисел равна второму числу, и наоборот, то такие числа называют дружественными.

Наименьшая пара (220; 284) — известна древним грекам:

$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11;$ $284 = 2^2 \cdot 71.$

Суммами их делителей являются соответственно:

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284,$

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$

После греков пару (17 296; 18 416) открыл марокканский ученый аль-Банны (1256–1321) и переоткрыл ее в 1636 г. Пьер Ферма (1601–1665):

$17\,296 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47;$ $18\,416 = 2^4 \cdot 1151.$

А вот пару дружественных чисел (63 020; 76 084) обнаружил в 1867 г. 16-летний итальянец Никколо Паганини.

К настоящему времени открыто более 600 пар дружественных чисел (большая часть с помощью ЭВМ). Не было найдено случая, когда одно число четное, а другое нечетное, хотя поиски чисел такого вида проводились среди всех чисел $n \leq 3 \cdot 10^9$.

57. Аликвотные дроби — это дроби, у которых числитель равен 1.

Например: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$;

$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$.

Существует интересный способ представления таких дробей.

58. Три девятки:

$999 \cdot 426 = \underline{425}\ 574$; $999 \cdot 107 = \underline{106}\ 893$.

$999 \cdot 963 = \underline{962}\ 037$.

Как видно, первые три цифры произведения есть умножаемое число, уменьшенное на 1, а остальные три цифры дополняют найденные три цифры до 9.

59. Число Шехерезады 1001.

С точки зрения математики оно обладает целым рядом интереснейших свойств:

1) это наименьшее натуральное четырехзначное число, которое можно представить в виде суммы кубов двух натуральных чисел:

$1001 = 10^3 + 1^3$;

2) число 1001 состоит из 77 чертовых дюжин:

$1001 = 77 \cdot 13$;

из 91 одиннадцаток или 143 семерок (7 — магическое число):

$1001 = 91 \cdot 11$; $1001 = 143 \cdot 7$;

3) если считать, что год равен 52 неделям, то 1001 ночь состоит:

$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ года $(52 \cdot 7 + 52 \cdot 7 + 26 \cdot 7 + 13 \cdot 7)$;

4) на свойствах числа 1001 основан признак делимости на 7, на 11, на 13.

60. Еще одно свойство числа 1001:

$295 \cdot 1001 = 295\ 295$; $768 \cdot 1001 = 768\ 768$.

При умножении числа Шехерезады на трехзначное число получается умноженное число, записанное дважды.

61. Число 10 101. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, но не трехзначных чисел, а двузначных:

$76 \cdot 10\,101 = 767\,676$, $11 \cdot 10\,101 = 111\,111$,

$29 \cdot 10\,101 = 292\,929$.

Каждое двузначное число, умноженное на 10 101, дает в результате само число, написанное трижды.

62. Число 10 001. Оно представляет собой произведение только двух простых чисел.

$10\,001 = 73 \cdot 137$.

63. Число 111 111.

$111\,111 = 3 \cdot 37\,037 = 7 \cdot 15\,873 = 11 \cdot 10\,101 =$
$= 13 \cdot 8547 = 37 \cdot 3003 = 21 \cdot 5291 = 33 \cdot 3367$.

64. Квадраты чисел, состоящих из единиц:

$11^2 = 121$;

$111^2 = 12321$;

$1111^2 = 1\,234\,321$;

$11\,111^2 = 123\,454\,321$;

$111\,111\,111^2 = 12\,345\,678\,987\,654\,321$.

Как видим, средняя цифра показывает количество единиц, а от нее влево и вправо цифры уменьшаются последовательно до единицы.

65. Числовая пирамида.

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$
$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$
$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$
$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$$

66. Свойства числа 9.

$20 = 9 \cdot 2 + 2$ $\qquad$ $7000 = 999 \cdot 7 + 7$

$50 = 9 \cdot 5 + 5$ $\qquad$ $13\,000 = 999 \cdot 13 + 13$

$300 = 99 \cdot 3 + 3$ $\qquad$ $190\,000 = 999 \cdot 19 + 19$

Как видим, всякое число, записанное цифрой со многими нулями, равно произведению этой цифры на число, состоящее из стольких девяток, сколько нулей после этой цифры, увеличенному на ту же цифру.

67. Другие свойства числа 9.

$1 \cdot 9 + 2 = 11$ $\qquad$ $9 \cdot 9 + 7 = 88$

$12 \cdot 9 + 3 = 111$ $\qquad$ $98 \cdot 9 + 6 = 888$

$123 \cdot 9 + 4 = 1111$ $\qquad$ $987 \cdot 9 + 5 = 8888$

..... $\qquad$ .....

$123\,456\,789 \cdot 9 + 9 = 111\,111\,111$ $\qquad$ $987\,654\,321 \cdot 9 - 1 = 888\,888\,888$

68. Числа, полученные в качестве квадратов единиц.

$$11^2 = 121$$
$$111^2 = 12\,321$$
$$1111^2 = 1\,234\,321$$
$$11\,111^2 = 123\,454\,321$$

$$1 + 2 + 1 = 2^2$$
$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 5^2$$

69. Число 143

$28 \cdot 143 = 4004$ $\qquad$ $3591 \cdot 143 = 513513$

$315 \cdot 143 = 45045$ $\qquad$ $5495 \cdot 143 = 785785$

$2464 \cdot 143 = 352352$ $\qquad$ $6993 \cdot 143 = 999999$

Итак, при умножении числа 143 на какое-нибудь число, кратное 7, получим число, состоящее из двух одинаковых чисел.

70. Свойство числа 7.

$$9 \cdot 7 = 63$$
$$99 \cdot 77 = 7623$$
$$999 \cdot 777 = 776\,223$$
$$9999 \cdot 7777 = 77\,762\,223$$
$$9999 \cdot 7777 = 7\,777\,622\,223$$

71. Число зверя 666.

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$$
$$666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$$
$$666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3$$

$$666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89$$
$$666 = 123 + 456 + 78 + 9$$
$$666 = 9 + 87 + 6 + 543 + 21$$

В последних трех равенствах все цифры разные, записанные в возрастающем порядке, а в последнем — в убывающем.

$$666 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 36$$
$$666^3 = 333^3 + 444^3 + 555^3$$

Последнее равенство получено из равенства

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3.$$

72. Квадрат в любую сторону.

$113^2 = 12\,769$	$96\,721 = 311^2$
$112^2 = 12\,544$	$44\,521 = 211^2$
$122^2 = 14\,884$	$48\,841 = 221^2$
$1212^2 = 1\,468\,944$	$4\,498\,641 = 2121^2$
$1112^2 = 1\,236\,544$	$4\,456\,321 = 2111^2$

73. Числа Смита.

Так называются числа, у которых сумма цифр равна сумме цифр разложения этого числа на простые множители.

Например, 4 937 775.

$$4\,937\,773 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 65\,837$$

Сумма цифр числа — 42.

Сумма цифр произведения — 42.

Другие числа Смита: 4; 22; 27; ...

74. Число 13 452.

$13 \cdot 4 = 52$, т. е. число, образованное первыми двумя цифрами, умноженное на среднюю цифру, дает число, образованное двумя последними цифрами.

75. Число 947 658.

$94 \cdot 7 = 658$ – аналогично числу 13 452.

76. Числа 39 157 и 57 139.

$$39 \cdot 57 - 1 = 57 \cdot 39 - 1 = 2222$$

77. Число 273 863.

$$273\,863 \cdot 365 = 99\,959\,995$$

Аналогично $64\,253 \cdot 365 = 23\,452\,345$.

78. Число 8 101 265 822 784.

Чтобы разделить это число на 8, достаточно переставить первую цифру числа в конец.

$$8\,101\,265\,822\,784 : 8 = 1\,012\,658\,227\,848$$

79. Задача о десяти цифрах.

2 438 195 760;	4 753 869 120;
3 785 942 160;	4 876 391 520.

Все четыре числа составлены из всех 10 цифр так, что все они делятся на числа от 2 до 18.

80. Число 1 026 753 849.

$$1\,026\,753\,849 = 32\,043^2$$

Это число – наименьший квадрат, содержащий все десять цифр от 0 до 9, причем каждую цифру — лишь по одному разу.

81. Число 9 814 072 356.

$$9\,814\,072\,356 = 99\,066^2$$

Это число – наибольший квадрат, содержащий все десять цифр от 0 до 9, причем каждую цифру – лишь по одному разу.

82. Числа 567 и 854.

$567^2 = 321\,489$; $854^2 = 729\,316$

Эти числа и только они содержат вместе со своими квадратами по одному и только одному разу каждую из девяти цифр, исключая нуль.

83. Число 207.

$$207 = 2 + 3 + 5 + 47 + 61 + 89.$$

Это число простое, составленное из девяти цифр, исключая нуль, причем сумма этих чисел минимальна.

84. Числа, равные сумме кубов своих цифр.

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$; $371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$;
$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$; $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$.

Таких чисел (не считая 1) всего 4.

85. Всегда квадрат.

$$11 + 4 + 1 = 16 = 4^2,$$
$$1111 + 44 + 1 = 1156 = 34^2,$$
$$111111 + 444 + 1 = 111556 = 334^2, \text{ и т. д.}$$

86. Числовые треугольники

$$\begin{array}{r} 5 \\ 65 \\ +\ 465 \\ 9\,465 \\ \underline{19\,465} \\ 29\,465 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ 48 \\ 648 \\ +\ 9\,648 \\ \underline{89\,648} \\ 189\,648 \\ \underline{289\,648} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ 17 \\ 417 \\ 3\,417 \\ 53\,417 \\ +\ 453\,417 \\ 7\,453\,417 \\ 67\,453\,417 \\ 567\,453\,417 \\ 3\,567\,453\,417 \\ \underline{73\,567\,453\,417} \\ 77\,777\,777\,777 \end{array}$$

87(А). Свойства числа 803:

$$803 = (8 + 0 + 3)(8^2 + 0^2 + 3^2).$$

Существует еще трехзначное число, обладающее указанным свойством. Найдите его!

88. Удивительные свойства числа 666.

$666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89$
$666 = 123 + 456 + 78 + 9$
$666 = 9 + 87 + 6 + 543 + 21$

В правых частях приведенных равенств все натуральные числа от 1 до 9 включительно, записанные в порядке возрастания, а в последнем — в порядке убывания.

89. Равны ли суммы чисел?

$$\begin{array}{r} 123456789 \\ 12345678 \\ 1234567 \\ 123456 \\ +\ 12345 \\ 1234 \\ 123 \\ 12 \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 21 \\ 321 \\ 4321 \\ +\ 54321 \\ 654321 \\ 7654321 \\ 87654321 \\ 987654321 \end{array}$$

90. «Шкатулка равенств»:

$$1 + 6 + 7 + 17 + 18 + 23 = \\ = 2 + 3 + 11 + 13 + 21 + 22$$

$$1^2 + 6^2 + 7^2 + 17^2 + 18^2 + 23^2 = \\ = 2^2 + 3^2 + 11^2 + 13^2 + 21^2 + 22^2$$

$$1^3 + 6^3 + 7^3 + 17^3 + 18^3 + 23^3 = \\ = 2^3 + 3^3 + 11^3 + 13^3 + 21^3 + 22^3$$

$$1^4 + 6^4 + 7^4 + 17^4 + 18^4 + 23^4 = \\ = 2^4 + 3^4 + 11^4 + 13^4 + 21^4 + 22^4$$

$$1^5 + 6^5 + 7^5 + 17^5 + 18^5 + 23^5 = \\ = 2^5 + 3^5 + 11^5 + 13^5 + 21^5 + 22^5$$

91. Верные равенства с одинаковыми цифрами:

$42 : 3 = 4 \cdot 3 + 2$; $\quad 4 \cdot 3^3 = 4^3 : 2 = 34 - 2$;

$5^{6-2} = 625$; $\quad (8 + 9)^2 = 289$;

$63 : 3 = 6 \cdot 3 + 3$; $\quad 2^{10} - 2 = 1022$;

$95 : 5 = 9 + 5 + 5$; $\quad 2^{8-1} = 128$.

$(2 + 7) \cdot 2 \cdot 16 = 272 + 16$;

92(А). Узоры чисел:

$$147 \cdot (14 + 7) = 14^3 + 7^3;$$
$$148 \cdot (14 + 8) = 14^3 + 8^3;$$
$$111 \cdot (11 + 1) = 11^3 + 1^3;$$
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 + 2 + 3) = 1^3 + 2^3 + 3^3.$$

93. Снежинки-цифры:

$$16 = 4^2;$$
$$1156 = 34^2;$$
$$111\,556 = 334^2;$$
$$11\,115\,556 = 3334^2;$$
$$1\,111\,155\,556 = 33\,334^2, \text{ и т. д.}$$

94. Все цифры от 0 до 9 включительно:

$$9 = \frac{97524}{10836} = \frac{95823}{10647} = \frac{57429}{06381} = \\ = \frac{95742}{10638} = \frac{75249}{08361} = \frac{58239}{06471}.$$

Попытайтесь составить и другие однозначные числа из всех десяти цифр.

95(А). Куб из суммы семи последовательных чисел:

$10 + 23 + 36 + 49 + 62 + 75 + 88 = 7^3$;

$13 + 25 + 37 + 49 + 61 + 73 + 85 = 7^3$;

$16 + 27 + 38 + 49 + 60 + 71 + 82 = 7^3$;

$19 + 29 + 39 + 49 + 59 + 69 + 79 = 7^3$;

$22 + 31 + 40 + 49 + 58 + 67 + 76 = 7^3$;

$25 + 33 + 41 + 49 + 57 + 65 + 73 = 7^3$;

$28 + 35 + 42 + 49 + 56 + 63 + 70 = 7^3$.

96(А). Равные дроби:

$$\frac{13}{77}=\frac{1313}{7777}=\frac{131313}{777777}.$$

На чем основано равенство этих дробей?

97. Число 512.

$$512=(5+1+2)^3.$$

Существуют ли еще трехзначные числа, обладающие указанным свойством?

98(А). Удивительные равенства:

$(1+9+8+9)^2-1\cdot9\cdot8\cdot9=9^2$,
$(1+9+8+8)^2-1\cdot9\cdot8\cdot8=10^2$,
$(1+9+8+7)^2-1\cdot9\cdot8\cdot7=11^2$,
$(1+9+8+6)^2-1\cdot9\cdot8\cdot6=12^2$,
$(1+9+8+5)^2-1\cdot9\cdot8\cdot5=13^2$,
$(1+9+8+4)^2-1\cdot9\cdot8\cdot4=14^2$,
$(1+9+8+3)^2-1\cdot9\cdot8\cdot3=15^2$,
$(1+9+8+2)^2-1\cdot9\cdot8\cdot2=16^2$,
$(1+9+8+1)^2-1\cdot9\cdot8\cdot1=17^2$.

Замечание 1. Понятно, что условию задачи удовлетворяют также перестановки чисел.

Замечание 2. Существуют ли еще аналогичные числа, состоящие из большего количества последовательных четырехзначных чисел? Это уже другая (более сложная) задача.

Замечание 3. Среди трехзначных чисел вышеуказанным свойством обладают числа от 881 до 889 включительно.

99. Число 4913.

$$(4+9+1+3)^3=4913.$$

100. Свойства числа 2012:

$$2012=45^2-13;$$
$$2012=4\cdot502+1+3.$$

В правых частях все цифры различны.

$$2012=33^2+27^2+13^2+5^2.$$

Таких пар можно составить 39.

$2012=17^2+17^0+41^1+41^2$;
$2012=23^2+23^0+38^1+38^2$;
$2012=45^2-13$ (все цифры от 1 до 5);
$2012=4\cdot502+1+3$ (все цифры от 1 до 5).

$2012=2\cdot2\cdot503$
$2013=3\cdot11\cdot61$
$2014=2\cdot19\cdot53$
$2015=5\cdot13\cdot31$

Произведение из трех простых чисел.

101. Произведения из трех простых чисел.

$2013=3\cdot11\cdot61$,
$2014=2\cdot19\cdot53$,
$2015=5\cdot13\cdot31$.

102. Числа Армстронга.

Это числа, равные сумме кубов своих цифр. Трехзначные числа были рассмотрены в № 84.

Среди четырехзначных чисел существуют 3 числа, обладающие указанным свойством:

$$1634=1^4+6^4+3^4+4^4,$$
$$8208=8^4+2^4+0^4+8^4,$$
$$9474=9^4+4^4+7^4+4^4.$$

Среди пятизначных чисел также существуют 3 числа:

$$54\,748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5,$$
$$92\,727 = 9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5,$$
$$93\,084 = 9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5 \text{ и т. д.}$$

103. Свойства числа 142 857.

Это число совпадает с периодически повторяющейся последовательностью цифр, стоящих в дробной части числа $\frac{1}{7}$, записанного в десятичной форме.

$$\frac{1}{7} = 0{,}\underline{142\,857}\,142\ldots$$
$$142\,857 \cdot 2 = 285\,714,$$
$$142\,857 \cdot 3 = 428\,571,$$
$$142\,857 \cdot 4 = 571\,428,$$
$$142\,857 \cdot 5 = 714\,285,$$
$$142\,857 \cdot 6 = 857\,142.$$

Как видим, произведение записано теми же цифрами, представленными в циклическом порядке.

Кроме того, $142\,857 \cdot 7 = 999\,999$.

104. Числа словами.

В этой фразе двадцать восемь букв.

Девять слов назад это предложение еще не началось.

105. Удивительное число 2100010006.

Число, первая цифра которого показывает, сколько в этом числе единиц, вторая — сколько в нем двоек, третья — сколько троек, ..., десятая — сколько нулей.

106(А). Верные равенства:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

Например, $\frac{3}{3} - \frac{4}{2} = \frac{3-4}{3-2}$,

$\frac{8}{2} - \frac{9}{3} = \frac{8-9}{2-3}$,

$\frac{6}{3} - \frac{8}{2} = \frac{6-8}{3-2}$,

$\frac{6}{2} - \frac{8}{4} = \frac{6-8}{2-4}$ и т. д.

Хотя так выполнять вычитание дробей нельзя, однако все равенства верные.

107(А). Интересное сокращение $\frac{5\frac{3}{4}}{4\frac{3}{5}} = \frac{5}{4}$.

Действительно, $5\frac{3}{4} : 4\frac{3}{5} = \frac{23}{4} : \frac{23}{5} = \frac{5}{4}$.

Аналогично $\frac{7\frac{4}{13}}{13\frac{4}{7}} = \frac{7}{13}$ и т. д.

108(А). Любопытные равенства.

$$13 = 12^2 - 11^2,$$
$$15 = 8^2 - 7^2,$$
$$17 = 9^2 - 8^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2013 = 1007^2 - 1006^2 = 337^2 - 334^2 =$$
$$= 97^2 - 86^2 = 47^2 - 14^2.$$

Аналогично

$2015 = 1008^2 - 1007^2 = 203^2 - 198^2 =$
$= 84^2 - 71^2 = 48^2 - 17^2$ и т. д.

109(А). Числа, у которых равны между собой сумма, произведение и частное.

Эти числа 0,5 и −1.

Действительно, $0{,}5 + (-1) = -0{,}5$;

$0{,}5 \cdot (-1) = -0{,}5$ и $0{,}5 : (-1) = -0{,}5$.

Эти числа могут быть получены из равенств

$$a + b = ab = \frac{a}{b}.$$

110. Интересное число 3333377733.

Само число и сумма его цифр делятся на 3 и 7, причем это число является наименьшим:

$3333377733 : 3 = 1\,111\,125\,911$,

$3333377733 : 7 = 476\,196\,819$,

$(3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3) : 3 =$
$= 42 : 3 = 14$,

$(3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3) : 7 =$
$= 42 : 7 = 6$.

111. Число 1 026 753 849.

Это число — наименьший квадрат, содержащий все десять цифр от 0 до 9 включительно, причем каждую цифру по одному разу:

$$1\,026\,753\,849 = 32\,043^2.$$

112. Число 9 814 072 356.

Это число — наибольший квадрат, содержащий все десять цифр от 0 до 9 включительно, причем каждую цифру по одному разу:

$$9\,814\,072\,356 = 99\,066^2.$$

113. Все цифры разные.

$$567^2 = 321\,489,$$
$$854^2 = 729\,316.$$

114. Красивые равенства.

$$11 + 4 + 1 = 16 = 4^2,$$
$$1111 + 44 + 1 = 1156 = 34^2,$$
$$111111 + 444 + 1 = 111\,556 = 334^2 \text{ и т. д.}$$

115. Интересные равенства.

$$13\,000 = 999 \cdot 13 + 13,$$
$$9000 = 999 \cdot 9 + 9,$$
$$50 = 9 \cdot 5 + 5.$$

Как видим, число, записанное цифрой со многими нулями, равно произведению этого числа на число, состоящее из стольких девяток, сколько нулей стоит после этой цифры, увеличенному на ту же цифру.

116. Удивительные свойства числа 9.

$$9 \cdot 9 + 7 = 88,$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888,$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8888,$$
$$9876 \cdot 9 + 4 = 88\,888,$$
$$98765 \cdot 9 + 3 = 888\,888,$$
$$987654 \cdot 9 + 2 = 8\,888\,888,$$
$$9876543 \cdot 9 + 1 = 88\,888\,888,$$
$$98765432 \cdot 9 + 0 = 888\,888\,888,$$
$$987654321 \cdot 9 - 1 = 8\,888\,888\,888.$$

117. Интересное возведение в квадрат.

$$9^2 = 81,$$
$$99^2 = 9801,$$
$$999^2 = 998001,$$
$$9999^2 = 99980001,$$
$$99999^2 = 9999800001.$$

118. Представление числа 7 при помощи цифр 1, 2, 3.

$7 = 3^2 - 2$, $\quad 7 = 2^{2^2} - 3^2$,

$7 = 2^3 - 1$, $\quad 7 = 3^3 - 2^2 - 2^{2^2}$.

119. Квадратный трехчлен Эйлера.

При $x = 0, 1, 2, \ldots, 79$ квадратный трехчлен $x^2 - 79x + 1601$ дает лишь простые числа: например, при $x = 0$ получим число 1601 — простое.

При $x = 1$ $1^2 - 79 \cdot 1 + 1601 = 1523$ — простое.

При $x = 2$ $2^2 - 79 \cdot 2 + 1601 = 1447$ — простое.

.....

При $x = 79$ $79^2 - 79 \cdot 79 + 1601 = 1601$ — простое.

Аналогичными свойствами обладают квадратные трехчлены

$$2x^2 + 29 \ (x = 0, 1, \ldots, 28) \text{ и}$$

$$x^2 + x + 41 \ (x = 0, 1, \ldots, 39).$$

120. Закономерности простых чисел.

7772 777	2221	19
7774 777	3331	199
7778 777	4441	1999
77716 777	6661	199999

888 01	11113	55501	66601
888 07	11131	55511	66617
888 11	11311	55529	66629
888 13	311111	55541	66643
888 17	131111	55547	66653
888 19	113111	55579	66683
		55589	66697.

121. Магические квадраты Серпиньского.

569	59	449
239	359	479
269	659	149

17	317	397	67
307	157	107	227
127	277	257	137
347	47	37	367

Сумма чисел каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали одна и та же. В первом случае она равна 1077, а во втором — 798.

Кроме того, все числа в волшебных квадратах — простые.

122(А). Равенство из четырех квадратов.

Существует сколько угодно равенств, у которых и в левой, и в правой частях по четыре квадрата.

Например,

$2014^2 + 2013^2 + 2030^2 + 2031^2 =$
$= 2021^2 + 2010^2 + 2023^2 + 2034^2,$

$2014^3 + 2013^3 + 2030^3 + 2031^3 =$
$= 2021^3 + 2010^3 + 2023^3 + 2034^3.$

Интересно бы узнать, как они получены.

123(А). Некоторые числовые равенства.

$1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 = 31 \cdot (1 + 3 + 5 + 7)$,
$1^4 + 3^4 + 5^4 + 7^4 = 37 \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2)$,
$1^5 + 3^5 + 5^5 + 7^5 = 1261 \cdot (1 + 3 + 5 + 7)$,
$1^7 + 3^7 + 5^7 + 7^7 = 56\,491 \cdot (1 + 3 + 5 + 7)$,
$1^9 + 3^9 + 5^9 + 7^9 = 2\,645\,401 \cdot (1 + 3 + 5 + 7)$,
$1^{10} + 3^{10} + 5^{10} + 7^{10} = 3\,479\,761 \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2)$,
$1^{11} + 3^{11} + 5^{11} + 7^{11} = 126\,645\,751 \cdot (1 + 3 + 5 + 7)$.

124(А). Еще серия красивых равенств.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$,
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$,
$1^5 + 2^5 + 3^5 + 4^5 = 130 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 13 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)$,
$1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 = 489 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$,
$1^7 + 2^7 + 3^7 + 4^7 = 187 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)$,
$1^9 + 2^9 + 3^9 + 4^9 = 28\,234 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$,
$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + 4^{10} = 110\,865 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$,
$1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + 4^{11} = 43\,735 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)$,
$1^{13} + 2^{13} + 3^{13} + 4^{13} = 6\,871\,138 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$.

125. Двузначное число, равное количеству букв в его названии.

Этим числом является 11.

126. Наименьшее двузначное число, квадрат которого оканчивается на три одинаковые цифры.

Этим свойством обладает число 38, так как $38^2 = 1444$.

127. После некоторого натурального числа 12 последующих чисел — составные.

Это числа 115, 116, 117, ..., 126. Всего 12 последовательных натуральных чисел.

128. Трехзначное число, равное сумме своих факториалов.

Факториалом числа n называется произведение натуральных чисел от 1 до n включительно. ! — знак факториала.

Таким свойством обладает число 145, так как

$145 = 1! + 4! + 5!$,
$1! = 1$,
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$,
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 4!5 = 120$.
Тогда $1 + 24 + 120 = 145$.

129. Трехзначное число, равное кубу суммы своих цифр.

Это число 512, так как $512 = (5 + 1 + 2)^3 = 8^3$.

130. Четырехзначное число, равное четвертой степени суммы его цифр.

Этим свойством обладает число 2401, так как $2401 = (2 + 4 + 0 + 1)^4 = 7^4$.

131(А). Два красивых равенства

$4913 = (4 + 9 + 1 + 3)^3 = 17^3$,
$5832 = (5 + 8 + 3 + 2)^3 = 18^3$,
$19\,683 = (1 + 9 + 6 + 8 + 3)^3 = 27^3$.

Есть еще одно число, обладающее указанным свойством, дающее куб двузначного числа. Найдите его.

132. Удивительные равенства.

$$122^2 + 597^2 = 13^5,$$
$$33\,802^2 + 8839^2 = 5^{13},$$
$$2^2 + 11^2 = 5^3 \text{ и т. д.}$$

Таких равенств можно привести сколько угодно.

133. Четыре действия арифметики:

$$1\,2\,3 = 1,$$
$$1\,2\,3\,4 = 1,$$
$$1\,2\,3\,4\,5 = 1,$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6 = 1,$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 = 1,$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 = 1,$$
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 = 1.$$

Расставьте между цифрами знаки «+», «−», «·», «:» и скобки (если понадобятся), чтобы в каждом ряду получилось по 1.

В случае необходимости две рядом стоящие цифры можно считать двузначным числом.

134. Снежинки — цифры:

$$16 = 4^2,$$
$$11\,56 = 34^2,$$
$$111\,556 = 334^2,$$
$$1111\,5556 = 3334^2,$$
$$11111\,55556 = 33334^2 \text{ и т. д.}$$

135(А). Учетверенная сумма четырех квадратов:

$$4 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) =$$
$$= 10^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2,$$

$$4 \cdot (7^2 + 3^2 + 1^2 + 4^2) =$$
$$= 15^2 + 4^2 + 2^2 + 6^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2.$$

136(А). Упятеренная сумма пяти квадратов:

$$5 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) =$$
$$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 15^2,$$

$$5 \cdot (5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 + 13^2) =$$
$$= 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + 6^2 + 8^2 + 45^2.$$

Таких равенств можно привести сколько угодно. Случай, когда утроенную сумму трех квадратов можно представить в виде четырех квадратов, рассматривал еще Льюис Кэрролл в книге «История с узелками», 1973. С. 126.

137(А). Удевятеренная сумма девяти квадратов:

$$9 \cdot (1^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2) =$$
$$= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 +$$
$$+ 3^2 + 3^2 + 3^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 +$$
$$+ 5^2 + 5^2 + 6^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 + 8^2 +$$
$$+ 9^2 + 9^2 + 9^2 + 11^2 + 11^2 + 13^2 + 66^2.$$

Представляет интерес обобщение задачи на случай n-й суммы из n квадратов (прим. авт. — *Э.Н. Балаян*).

138. Представление числа 100 с помощью девяти разных цифр.

$$97 + (5 + 3) : 8 + 6 : 4 + 1 : 2 = 100,$$
$$75 + 24 + 9 : 18 + 3 : 6 = 100,$$
$$95\frac{1}{2} + 4\frac{38}{76} = 100,$$
$$24\frac{3}{6} + 75\frac{9}{18} = 100 \text{ и т. д.}$$

139. Представление числа 100 с помощью всех десяти цифр.

$$78\frac{3}{6}+21\frac{45}{90}=100.$$

Есть еще четыре способа, найдите их.

140(А). Расположение цифр 1, 2, ..., 9 двумя группами по четыре цифры в каждой, при котором суммы чисел, составленных из цифр каждой группы, равны между собой.

Например:

1) $172 + 5 = 177,$
$84 + 93 = 177.$

2) $172 + 5 = 177,$
$83 + 94 = 177.$

Есть и другие варианты решения. Найдите их.

141(А). Восстановите числитель и знаменатель дробей:

$$\frac{15}{?}-\frac{?}{3}=\frac{1}{2}.$$

Например: $\frac{15}{2}-\frac{21}{3}=\frac{1}{2}$; $\frac{15}{10}-\frac{3}{3}=\frac{1}{2}$.

Есть еще два решения. Найдите их.

142. Какая дробь больше: $\frac{13}{23}$ или $\frac{133}{233}$?

Поскольку $1-\frac{13}{23}=\frac{10}{23}$, а $1-\frac{133}{233}=\frac{100}{233}$, то

$\frac{10}{23}=\frac{100}{230}>\frac{100}{233}$, т. е. первая дробь больше.

143(А). Верное равенство $13 = 17$.

Запишем верное равенство

$26 + 39 - 65 = 34 + 51 - 85$, или

$13 \cdot (2 + 3 - 5) = 17(2 + 3 - 5)$, или

сократив обе части на $2 + 3 - 5$, получим

$13 = 17$. Где ошибка?

144. Расставьте цифры от 1 до 9 включительно в пустые клетки так, чтобы равенство было верным.

□ • □□ = □□□ = □□ • □

Вот решение: $6 \cdot 29 = 174 = 58 \cdot 3$.

Как видим, все цифры разные и равенство верное.

145. Задача Г. Дьюдени.

Четыре числа, сумма каждой пары которых и сумма которых представляет собой точные квадраты:

$10\,430 + 3970 = 120^2$; $3970 + 2114 = 78^2$;
$10\,430 + 2114 = 112^2$; $3970 + 386 = 66^2$;
$10\,430 + 386 = 104^2$; $2114 + 386 = 50^2$;
$10\,430 + 3970 + 2114 + 386 = 130^2$.

По мнению Г. Дьюдени (классика занимательной математики) приведенные числа — наименьшие.

Представляет интерес общее решение задачи (прим. авт. — *Э.Н. Балаян*).

146. Сумма любых двух натуральных чисел из четырех является полным квадратом:

$1058 + 6338 = 86^2$; $1058 + 10\,823 = 109^2$;
$1058 + 13\,826 = 122^2$; $6338 + 10\,823 = 131^2$;
$6338 + 13\,826 = 142^2$; $10\,823 + 13\,826 = 157^2$.

147. Все цифры различные:

$1738 \cdot 4 = 6952$; $438 \cdot 12 = 5796$;
$1963 \cdot 4 = 7852$; $296 \cdot 18 = 5346$;
$198 \cdot 27 = 5346$; $157 \cdot 28 = 4396$;
$138 \cdot 42 = 5796$; $186 \cdot 39 = 7254$.

148(А). Интересное извлечение корней:

$\sqrt{121} = 12 - 1$; $\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4}$;
$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = 9 - \sqrt{4}$; $\sqrt{169} = 16 - \sqrt{9} = \sqrt{16} + 9$;
$\sqrt{81} = 8 + 1$;
$\sqrt{256} = 2 \cdot 5 + 6$; $\sqrt{324} = 3 \cdot (2 + 4)$;
$\sqrt{11\,881} = 118 - 8 - 1$; $\sqrt{1936} = -1 + 9 + 36$

и т. д.

149(А). Последовательность девяти квадратов:

$2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + 25^2 + 26^2 = 48^2$,
$4^2 + 10^2 + 16^2 + \ldots + 50^2 + 52^2 = 96^2$ и т. д.

150(А). Последовательность одиннадцати квадратов:

$18^2 + 19^2 + 20^2 + \ldots + 27^2 + 28^2 = 77^2$,
$36^2 + 38^2 + 40^2 + \ldots + 54^2 + 56^2 = 154^2$ и т. д.

151(А). Один куб равен сумме трех кубов:

$937^3 = 118^3 + 268^3 + 929^3$,
$2096^3 = 42^3 + 980^3 + 2022^3$,
$1096^3 = 21^3 + 490^3 + 1011^3$ и т. д.

152(А). Коллекция сумм и кубов:

$87 + 6 + 69 = 27 + 38 + 97 = 162$,
$87^3 + 6^3 + 69^3 = 27^3 + 38^3 + 97^3 = 987\,228$.
Кроме того, $(87^3 + 6^3 + 69^3) : (87 + 6 + 69) =$
$= (27^3 + 38^3 + 97^3) : (27 + 38 + 97) = 6094$,
$131 + 274 + 428 = 104 + 326 + 403$,
$131^3 + 274^3 + 428^3 = 104^3 + 326^3 + 403^3$ и т. д.

153. Сумма кубов целых чисел равна квадрату их суммы:

$1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 2 + 4)^2$,
$1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 6^3 = (1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 6)^2$.

Проблема нахождения таких чисел связана с задачей французского математика Лиувилля:

найти целые числа a, b, c, d, ..., сумма кубов которых равна квадрату их суммы, т. е.

$a^3 + b^3 + c^3 + \ldots = (a + b + c + \ldots)^2$.

Среди чисел могут быть и равные.

Сам математик нашел остроумный способ нахождения таких чисел.

154. Теорема Никомаха.

$1^3 = 1$,
$2^2 = 3 + 5$,
$3^3 = 7 + 9 + 11$,

$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19,$
$5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29.$

Сумма каждой группы равна кубу номера группы.

155. Пять кубов:

$25^3 + 26^3 + 27^3 + 28^3 + 29^3 = 315^2.$

156. Двенадцать кубов:

$14^3 + 15^3 + 16^3 + ... + 23^3 + 24^3 + 25^3 = 312^2.$

157(А). Два куба:

$7^3 = 343;$ $\quad 512 - 343 = 169 = 13^2;$
$8^3 = 512;$ $\quad$ значит, $8^3 - 7^3 = 13^2.$

158(А). Разность квадратов:

$617\,284^2 - 617283^2 = 1234567.$

159(А). Разность кубов:

$642^3 - 641^3 = 1234567.$

160(А). Арифметическая прогрессия:

$482 + 3362 = 62^2;\ 482 + 6242 = 82^2;$
$3362 + 6242 = 98^2.$

Числа 482, 3362, 6242 образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2880$.

161(А). Геометрическая прогрессия:

$1 + 7 + 49 + 343 = 20^2,$
$1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 11^2.$

162. Интересные свойства чисел 2013 и 2014.

Простые делители числа 2013 — 3, 11 и 61.
Простые делители числа 2014 — 2, 19 и 53.
$2013 + 3 + 11 + 61 = 2088,$
$2014 + 2 + 19 + 53 = 2088.$
Вот такое удивительно совпадение!

163. Свойства числа 2015

1) $2015 = 3^2 + 6^2 + 11^2 + 43^2$

2) Число 2015 встречается в десятичной части числа π, по крайней мере на следующих трех позициях:

$$\pi = 3{,}14159...7952311\overset{19038}{\boxed{2015}}0432932...$$
$$4231179\overset{35784}{\boxed{2015}}3464977...4625370\overset{50392}{\boxed{2015}}7821573...$$

3) Аналогично для числа e (основание натурального логарифма):

$$e = 2{,}71828...1573624\overset{15760}{\boxed{2015}}9350785...$$
$$0863812\overset{25144}{\boxed{2015}}9808943...7060715\overset{29885}{\boxed{2015}}8982529...$$

164. Красивая закономерность.

2015 — число Лукаса–Кармайкла.
Простые делители: 5, 13 и 31.
Удивительно, но число 2016 делится на $5 + 1$; $13 + 1$ и $31 + 1$!

Литература

1. *Балаян Э.Н.* 1001 олимпиадная и занимательные задачи по математике. – 3-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2008.

2. *Балаян Э.Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

3. *Балаян Э.Н.* 555 олимпиадных и занимательных задач по математике. 5–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2009.

4. *Бартенев Ф.А.* Нестандартные задачи по алгебре. — М.: Просвещение, 1976.

5. *Дьюдени Г.Э.* 520 головоломок. — М.: Просвещение, 1983.

6. *Коваль С.* Математическая смесь. — Варшава, 1972.

7. *Лоповок Л.М.* 1000 проблемных задач по математике. — М.: Просвещение, 1995.

8. *Мазаник А.А.* Реши сам. Ч. III. — Минск: Народная Асвета, 1972.

9. *Малаховский В.С.* Числа знакомые и незнакомые. — Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2005.

10. *Минаева С.С.* Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике. — М.: Просвещение, 1983.

11. *Сивашинский И.Х.* Неравенства в задачах. — М.: Наука, 1967.

12. *Тригг У.* Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975.

Содержание

Предисловие 3

***Раздел I.* Условия задач** 6

5 класс 6

Признаки делимости чисел, задачи на проценты, доказательство, сравнение, разрезание, текстовые задачи, принцип Дирихле, числовые ребусы, логические задачи, начальные сведения по геометрии

6 класс 48

Задачи по нахождению НОД и НОК, действия с дробями, решение уравнений с модулем, вычислительные задачи, задачи на проценты, переливание, разрезание и перекраивание фигур, инварианты, принцип Дирихле, логические задачи

***Раздел II.* Ответы. Указания. Решения** 91

5 класс 91

6 класс 132

***Раздел III.* Удивительные равенства** 176

Литература 216

Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

700
ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ И ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

5–6 классы

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Подписано в печать 23.06.2015.
Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,92. Тираж 2500 экз.
Заказ № 331.

ООО «Феникс»
344011, г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru
Сайт интернет-магазина: www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Качество печати соответствует предоставленным диапозитивам.

Вышли в свет

Э.Н. Балаян

800 ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ
9–11 классы

В предлагаемом пособии рассмотрены различные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня трудности для учащихся 9–11 классов.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким, уже ставшим классическими, темам, как делимость и остатки, инварианты, диофантовы уравнения, принцип Дирихле, геометрические задачи и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения, причем некоторые задачи решены различными способами. Большинство задач авторские, отмечены значком (А).

Пособие предназначено прежде всего старшеклассникам общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, учителям математики для подготовки детей к олимпиадам различного уровня, а также к ЕГЭ, студентам — будущим учителям, работникам центров дополнительного образования, и всем любителям математики.

Издательство Феникс

344011, г. Ростов-на-Дону,
ул. Варфоломеева, 150
Тел.: (863) 261-89-50
www.phoenixrostov.ru

ПРЕДЛАГАЕТ:

- ✓ Около 100 новых книг каждый месяц
- ✓ Более 6000 наименований книжной продукции собственного производства

ОСУЩЕСТВЛЯЕТ:

- ✓ Оптовую и розничную торговлю книжной продукцией

ГАРАНТИРУЕТ:

- ✓ Своевременную доставку книг в любую точку страны, ***за счет издательства***, ж/д контейнерами
- ✓ ***Многоуровневую*** систему скидок
- ✓ ***Реальные цены***
- ✓ ***Надежный доход*** от реализации книг нашего издательства.

ТОРГОВЫЙ ОТДЕЛ

344011, г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150

Контактные телефоны:

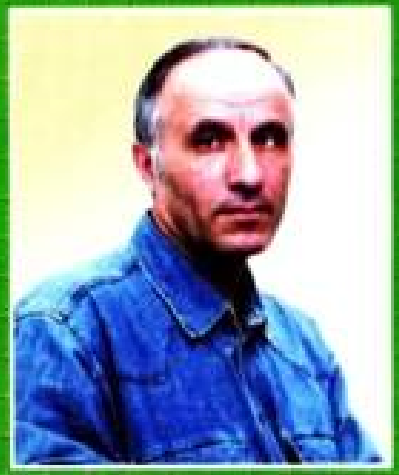
(863) 261-89-53, 261-89-54,
261-89-55, 261-89-56, 261-89-57.
Факс 261-89-58.

Начальник торгового отдела

Аникина Елена Николаевна

Тел.: (863)261-89-53.

E-mail: torg153@aaanet.ru



Эдуард Николаевич Балаян

профессор РАЕ, Заслуженный работник науки и образования, почетный доктор наук (DOCTOR OF SCIENCE, HONORIS CAUSA), известный учитель математики, автор более 100 книг. Имеет большой опыт работы, в том числе в специализированном математическом лицее. Его выпускники ныне работают в Российской Федерации, странах СНГ, дальнего и ближнего зарубежья, с благодарностью вспоминая его увлекательные уроки.

За многолетний педагогический труд, большой личный вклад в разработку учебно-методической литературы по математике награжден медалью им. В.И. Вернадского, почетной грамотой МО и науки РФ и другими наградами.

В настоящее время работает на подготовительном отделении Донского государственного технического университета (ДГТУ).

ISBN 978-5-222-25904-7

9 785222 259047

Феникс

700 ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ И ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ 5-6 КЛАССЫ

Э.Н. Балаян

700 ЛУЧШИХ ОЛИМПИАДНЫХ И ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

5-6 классы